Simulation von Straßenverkehr

Anton Schüller[1]
Ulrich Trottenberg[1,2]
Roman Wienands[2]
Angelo Salato[2]
Christina Wolfgarten[2]

[1]**Fraunhofer-Institut**
Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen SCAI

[2] **Mathematisches Institut**
der Universität zu Köln

Version 1.2
24.02.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkung: Simulation von Straßenverkehr im Schulunterricht

Das vorliegende Skript richtet sich in erster Linie an Lehrkräfte, die dieses Modul im Unterricht einsetzen wollen. Es eignet sich aber auch für Schüler/innen der Oberstufe, die sich hiermit selbständig in die Thematik einarbeiten können.

Zur Motivation: Ganz wichtig für Entwicklung und Fortschritt der modernen Gesellschaft ist die Mobilität von Menschen und Gütern. Dies wird z.B. daran deutlich, dass etwa 10% des deutschen Bundeshaushalts für das Verkehrsministerium eingesetzt werden. Der Straßenverkehr ist dabei in ganz erheblichem Maße für die Luftverschmutzung mit verantwortlich: In Deutschland erzeugt der Straßenverkehr etwa 70% des Kohlenmonoxids, 60% der Stickoxide und 20% des Kohlendioxids in der Luft. Der Anteil des Straßenverkehrs am Gesamtenergieverbrauch beträgt rund 28% [6, 7].

Verkehrsstaus gehören zum Alltag, kosten Nerven, verschlingen Zeit und Energie und produzieren überflüssige Schadstoffe. Häufig entstehen bei dichtem Verkehr sogenannte "*Staus aus dem Nichts*". Wie sie entstehen und was jeder einzelne Verkehrsteilnehmer dazu beitragen kann, um sie zu verhindern, lässt sich mit ganz einfachen algorithmischen Modellen und entsprechenden Experimenten zeigen. Notwendige mathematische Vorkenntnisse beschränken sich auf die Grundrechenarten.

Als ein Werkzeug, um den Verkehr im Detail zu simulieren, benutzen wir in diesem Unterrichtsmodul zelluläre Automaten. Wir führen die Idee zellulärer Automaten am "Spiel des Lebens" ein und übertragen sie dann auf ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation.

Die Simulation von Straßenverkehr ist ein Modul, das besonders auch Schüler anspricht und motiviert, die der Mathematik skeptischer gegenüberstehen.

Das zugehörige Unterrichtsmaterial eignet sich für eine Unterrichtsreihe ab etwa Klasse 8 oder 9 und kann im Mathematik-Unterricht, im Differenzierungsbereich Mathematik/Naturwissenschaft der Mittelstufe oder im Rahmen einer Projektwoche eingesetzt werden. Es eignet sich auch als Einführung in einem Projektkurs der Oberstufe, in dem die Modelle erweitert und allgemeinere Untersuchungen zur Simulation von Straßenverkehr durchgeführt werden können.

Einzelne Teile des Moduls, insbesondere der Film, in dem ein Experiment zur Stauentstehung festgehalten ist, oder die Experimente, welche die Schüler/innen selbst durchführen, indem sie sich in Gruppen auf Kreisbahnen mit unterschiedlichen Radien bewegen und so unterschiedliche Verkehrsdichten simulieren, können bereits ab der Jahrgangsstufe 5 im Unterricht eingesetzt werden.

Das vorliegende Unterrichtsmodul enthält eine Reihe von Arbeitsblättern sowie einige Computerprogramme, in denen das Spiel des Lebens und einfache Modelle zur Verkehrssimulation realisiert sind. Diese Computerprogramme können zu Demozwecken von der Lehrkraft eingesetzt oder von den Schüler/innen benutzt werden, um das "Spiel des Lebens" bzw. das Verhalten der Verkehrsmodelle zu analysieren. Die anderen Teile des Unterrichtsmoduls sind von diesen Computerprogrammen unabhängig und können weitgehend auch ohne sie benutzt werden.

Grundlage für dieses Skript ist das Kapitel 8 in [1], auf das wir für viele detailliertere Informationen auch verweisen. In [1] wird die grundsätzliche Bedeutung von Modellierung und Simulation als "*dritte Säule des Erkenntniserwerbs*" neben Experimenten und theoretisch-analytischen Untersuchungen anhand einer Reihe interessanter Beispiele deutlich gemacht.

Die Entwicklung dieses Unterrichtsmoduls wurde unterstützt durch eine Projektförderung durch die WestLB-Stiftung Zukunft NRW, für die wir uns ganz herzlich bedanken.

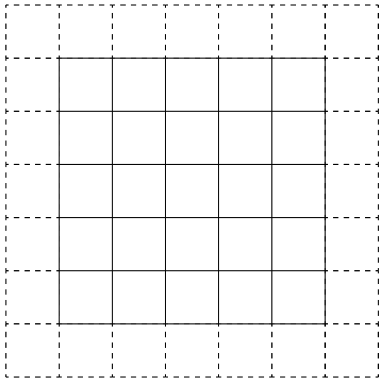
2 Einführung in zelluläre Automaten mit dem "Spiel des Lebens"

Um in das Prinzip der zellulären Automaten einzuführen, hat sich ein Einstieg über das sogenannten "Spiel des Lebens", das 1970 von dem Mathematiker Conway entwickelt wurde, bewährt. Dieses "Spiel des Lebens" hat einen völlig anderen Anwendungshintergrund (Biologie) als die Verkehrssimulation, benutzt aber ebenso wie diese einen zellulären Automaten (für eine ausführliche Darstellung vgl. beispielsweise die Internet-Seite `http://de.wikipedia.org/wiki/Conways_Spiel_des\_Lebens`).
Hier geht man aus von einem aus kleinen Quadraten (Zellen) bestehenden Gitter. Die Größe des Gitters kann frei gewählt werden (z.B. 20×30 Zellen). Jede Zelle kann leben oder tot sein. Zu Beginn wird eine Anfangsgeneration lebender Zellen auf dem Spielfeld platziert. Die nächste Generation ergibt sich aus einigen einfachen Regeln. Auch diese Regeln entsprechen einem Algorithmus. Mathematisch entspricht das Entstehen jeder neuen Generation einem Iterationsschritt des durch die Regeln definierten Verfahrens. Populationen, die sich nicht (mehr) ändern, sind mathematisch gesehen Fixpunkte des Algorithmus.

Zum Einstieg in dieses Thema dienen zwei Arbeitsblätter zum *Spiel des Lebens* (vgl. Abschnitt 7.2). Dies kann ergänzt werden anhand des Python-Programms `gameoflife.py` (vgl. Abschnitt 7.1.1).

Bei Vorliegen einfacher Programmierkenntnisse können die (oder einige interessierte) Schüler/innen das "Spiel des Lebens" auch selbst programmieren. Für diesen Fall empfiehlt sich der Hinweis, dass die Programmierung wesentlich einfacher ist, wenn man – wie in nachstehender Skizze angezeigt – im Programm eine weitere (immer leere) Zellschicht rings um das eigentliche Spielfeld vorsieht, um eine Vielzahl sonst erforderlicher Fallunterscheidungen in Randnähe zu umgehen, wenn man die Anzahl der lebenden Nachbarzellen ermittelt. (Zellen am Rand oder in der Ecke des Spielfelds haben sonst im Programm weniger Nachbarn).

Man kann zelluläre Automaten auch benutzen, um einfache Räuber-Beute-Modelle zu entwickeln, z.B. eine Insel, auf der Hasen und Füchse leben. Dann kann man beobachten, dass ein Anwachsen der Hasenpopulation auch ein Anwachsen der Zahl der Füchse zur Folge hat, bis so viele Füchse da sind, dass die Hasenpopulation wieder geringer wird, was wiederum auch eine Reduktion der Zahl der Füchse zur Folge hat, so dass sich die Hasen wieder vermehren können usw. Ein entsprechendes Computerprogramm gehört auch zu den sonstigen Materialien dieses Unterrichtsmoduls (vgl. Abschnitt 7.1.2).



Die oben erwähnte Web-Seite
`http://de.wikipedia.org/wiki/Conways_Spiel_des_Lebens`
kann ebenfalls zur Erläuterung einzelner spezieller Eigenschaften des *Spiels des Lebens* (z.B. unterschiedliche stabile Lebensformen) im Unterricht eingesetzt werden.

3 Zelluläre Automaten zur mikroskopischen Verkehrssimulation

Zelluläre Automaten bieten auch die Möglichkeit, einfach und recht gut Straßenverkehr zu simulieren. Entsprechende Modelle wurden bereits Anfang der 90er Jahre entwickelt [2, 3].

Dazu wird eine Straße in einzelne Abschnitte einer festen Länge (z.B: 7,50 m, was der Länge eines Autos plus einem Mindestabstand zu anderen Autos entspricht) aufgeteilt. Jeder solche Abschnitt ist eine Zelle. In unserem Modell können diese Abschnitte (oder Zellen) zu einem festen Zeitpunkt entweder genau ein Auto mit einer bestimmten momentanen Geschwindigkeit enthalten, oder sie sind leer. Jedes Auto hat eine individuelle Eigengeschwindigkeit, kann bei freier Strecke beschleunigen und hält bestimmte einfache Abstandsregeln zu dem vorausfahrenden Fahrzeug ein. (Mathematisch gesehen entsprechen diese Regeln bereits einem Algorithmus!) Fahren jetzt alle Autos mit exakt der gleichen Geschwindigkeit und ist der Verkehr so dünn, dass genügend Abstand zu den jeweils vorausfahrenden Fahrzeugen besteht, entsteht kein Stau. Dies ändert sich jedoch, wenn man individuelle Abweichungen der Geschwindigkeiten zulässt, zum Beispiel durch die Einführung eines (zufallsgesteuerten) "Trödelfaktors" oder durch "Drängler", die beim Abbremsen des vorausfahrenden Fahrzeugs schärfer bremsen müssen, was sich zu einer Kettenreaktion mit anschließendem Stau aufschaukeln kann.

3.1 Das einfachste Modell

Wir betrachten eine einfache einspurige Ringstraße, auf der sich Autos nur in eine Richtung fortbewegen. Überholvorgänge und Gegenverkehr sind in dem Modell nicht enthalten. Diese Straße teilen wir in Zellen von 7,50 m Länge ein. Autos können sich in einem Zeitschritt nur um eine ganze Zahl von Zellen vorwärts bewegen. Geht man von einer Zeitschrittdauer von einer Sekunde aus, so entspricht eine Vorwärtsbewegung von einer

Zelle pro Zeitschritt einer Geschwindigkeit von

$$\frac{7,5\ \text{m}}{1\ \text{s}} = 27\ \text{km/h}\ .$$

Einer Vorwärtsbewegung von 5 Zellen pro Sekunde entspricht dann einer Geschwindigkeit von $5 \cdot 27$ km/h $= 135$ km/h. Da dies in etwa der Richtgeschwindigkeit auf den deutschen Autobahnen entspricht, werden wir dies als Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$ ansetzen. Die Autos können sich also in jedem Zeitschritt um 0 bis 5 Zellen vorwärts bewegen.

Ferner muss *Kollisionsfreiheit* garantiert sein, d.h. auf *einer* Zelle darf sich immer nur *höchstens ein Fahrzeug* befinden.

Das einfachste Modell, das wir hier betrachten wollen, besteht in jedem Zeitschritt aus drei Teilschritten. In den ersten beiden Teilschritten wird die neue Geschwindigkeit des Fahrzeugs so ermittelt, dass Kollisionen verhindert werden. Erst im dritten Teilschritt bewegen sich die Fahrzeuge vorwärts:

1. *Beschleunigen:* Jedes Fahrzeug erhöht seine Geschwindigkeit um 1 Zelle pro Zeiteinheit, bis es die Maximalgeschwindigkeit erreicht hat.

2. *Bremsen:* Jedes Fahrzeug prüft, ob es mit der gerade berechneten Geschwindigkeit auf ein anderes Fahrzeug auffahren oder dieses überholen würde. Ist dies der Fall, so reduziert es seine Geschwindigkeit sofort so weit, dass eine Kollision vermieden wird.

3. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug bewegt sich einen Zeitschritt mit der aktuellen Geschwindigkeit vorwärts.

Dies können wir in einem einfachen Algorithmus präzisieren. Wir haben $i = 1, \ldots, n$ Fahrzeuge. Jedes Fahrzeug hat eine individuelle Eigengeschwindigkeit v_i. Die Höchstgeschwindigkeit ist $v_{\max} = 5$. Jeder der folgenden drei Teilschritte wird dann gleichzeitig für alle Fahrzeuge durchgeführt:

1. *Beschleunigen:* $v_i = \min\{v_i + 1, v_{\max}\}$

2. *Bremsen:* Falls $v_i > d(i, i+1)$, so reduziere v_i auf $\quad v_i = d(i, i+1)\ .$
   Hierbei ist $d(i, i+1)$ die *Anzahl der leeren Zellen* zwischen Fahrzeug i und Fahrzeug $i+1$.

3. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug i bewegt sich v_i Zellen vorwärts.

Als Vorbereitung zur Einführung dieses Algorithmus kann das Arbeitsblatt *Zelluläre Automaten zur Verkehrssimulation* eingesetzt werden.

Die Einführung des Algorithmus wird durch das Arbeitsblatt *Ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation* unterstützt.

Eine Analyse dieses Verkehrsmodells ist mit dem Arbeitsblatt *Analyse eines einfachen Verkehrsmodells* bzw. mit dem Computerprogramm zur Simulation dieses einfachen Verkehrsmodells möglich (vgl. Abschnitt 7.1.3).

Dieses Modell kann bei einem höheren Verkehrsaufkommen Staus erzeugen. Auch das gleichzeitige Auftreten von Teilstrecken, auf denen mit hohen Geschwindigkeiten gefahren werden kann, und Teilstrecken, auf denen ein Stau entstanden ist, werden vom Modell dargestellt.

Das völlig stationäre Verkehrsverhalten (Staus bewegen sich völlig gleichmäßig entgegen der Fahrtrichtung nach hinten fort) und das völlig gleichförmige Verhalten aller Fahrzeuge sind jedoch weit von der Realität entfernt.

3.2 Einführung eines Trödelfaktors

In dem im vorangegangenen Abschnitt eingeführten einfachen Modell zur Verkehrssimulation verhalten sich alle Teilnehmer völlig gleichartig. Dies entspricht nicht dem Verhalten, wie man es im Verkehr beobachten kann:

- Die Fahrzeuge bewegen sich in der Regel nicht alle mit der gleichen Geschwindigkeit und völlig gleichförmig vorwärts.
- Es gibt Überreaktionen beim Bremsen, welche die nachfolgenden Fahrzeuge ebenfalls zum heftigen Bremsen zwingen. Oft ist auch, gerade nach Staus oder bei auf Grün schaltenden Ampeln, ein verzögertes Beschleunigen zu beobachten.

Ein derartiges Verhalten kann in unserem einfachen Modell durch die Einführung eines sogenannten Trödelfaktors nachgebildet werden. Der Algorithmus sieht dann folgendermaßen aus:

1. *Beschleunigen:* $v_i = \min\{v_i + 1, v_{\max}\}$
2. *Bremsen:* Falls $v_i > d(i, i+1)$, so reduziere v_i auf $v_i = d(i, i+1)$.
   Hierbei ist $d(i, i+1)$ die *Anzahl der leeren Zellen* zwischen Fahrzeug i und Fahrzeug $i+1$.
3. *Trödeln:* Mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p wird die Geschwindigkeit v_i um 1 reduziert: $v_i = \max\{v_i - 1, 0\}$ mit Wahrscheinlichkeit p.
4. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug i bewegt sich v_i Zellen vorwärts.

Für $p = 0$ erhalten wir wieder das ursprüngliche Modell.

Für ausführlichere Erläuterungen zu diesem Modell mit Trödelfaktor verweisen wir auf [1, 2, 3].

Die Einführung des Modells mit Trödelfaktor wird durch das Arbeitsblatt *Einführung eines Trödelfaktors in das Modell zur Verkehrssimulation* unterstützt.

Eine Analyse dieses Verkehrsmodells ist mit dem Arbeitsblatt *Analyse eines einfachen Verkehrsmodells mit Trödelfaktor* bzw. mit dem Computerprogramm zur Simulation dieses Verkehrsmodells möglich (vgl. Abschnitt 7.1.4).

3.3 Anwendungen des Modells

Zelluläre Automaten, die auf den Prinzipien der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Modelle aufbauen, werden in der Praxis in vielfältiger Weise für Verkehrssimulationen genutzt, z.B. in Nordrhein-Westfalen zur Stauprognose auf Autobahnen oder in der Schweiz zur Simulation des gesamten Individualverkehrs [1, 3]. Das in Amerika entwickelte Programm TRANSIMS benutzt derartige Modelle auch “zur Simulation, Prognose und Analyse von Auswirkungen des Verkehrs, wie z.B. der Luftqualität” [1, 4, 5].

4 Schülergruppenexperimente zur Verkehrssimulation

Schüler/innen können selbst in größeren Gruppen Experimente zur Stauentstehung durchführen. Dazu zeichnet man auf einer größeren freien Fläche Kreisbahnen, auf denen die Schüler/innen sich vorwärts bewegen können. Gegenverkehr und Überholen sind nicht gestattet. Man kann jetzt unterschiedliche Verkehrsdichten simulieren, indem man die Anzahl der Schüler/innen auf der Kreisbahn erhöht oder indem man Kreisbahnen mit unterschiedlichen Radien bei fester Zahl von Schüler/innen zugrundelegt.

Beim Berühren des Vordermanns bleibt der Vordermann stehen, denn dies entspricht im echten Verkehrsgeschehen einem Auffahrunfall mit nachfolgendem Stau. Das Berühren des Vordermanns sollte also auf jeden Fall unterbleiben. Notorische “Verkehrssünder” sollten “aus dem Verkehr gezogen” werden, um vernünftige Experimente möglich zu machen.

Zunächst sollen die Schüler/innen sich frei auf der Kreisbahn bewegen (gehen). Erhöht man die Verkehrsdichte, so werden ab einer bestimmten Dichte lokale Staus entstehen, die sich gegen die Bewegungsrichtung nach hinten fortpflanzen.

Jetzt kann man einige Schüler/innen auffordern, sporadisch ihre Geschwindigkeit zu reduzieren. Dies wird dazu führen, dass Staus schon bei einer geringeren Verkehrsdichte bzw. häufiger entstehen.

Alternativ oder zusätzlich kann man andere Schüler/innen auffordern zu “drängeln”, d.h. möglichst nahe hinter dem Vordermann zu bleiben, aber immer mit der strikten Order, den Vordermann auf keinen Fall zu berühren. Wird der Vordermann jetzt langsamer, wird der “Drängler” in der Regel schärfer abbremsen, und auch dies wird das Auftreten von Staus begünstigen.

5 Film des Wissensmagazins “Einstein” zur Stauentstehung

Das Wissensmagazin Einstein hat in einem Film ein reales Experiment zur Stauentstehung festgehalten, bei dem eine Reihe von Autos im Kreis fahren. Dieser Film ist auch im Internet zu sehen (z.B. über `http://www.youtube.com/watch?v=od-XkcmE0_w`) und könnte im Unterricht gezeigt werden.

In diesem Experiment, bei dem eine hohe Verkehrsdichte untersucht wird, zeigt sich ganz deutlich, dass kleine individuelle Abweichungen von der Durchschnittsgeschwindigkeit Staus verursachen. Am Anfang des Experiments, als alle Verkehrsteilnehmer noch hochkonzentriert sind, läuft der Verkehr noch flüssig, aber dies ändert sich relativ bald. Sobald erst einmal ein Stau entstanden ist, pflanzt sich dieser entgegen der Fahrtrichtung nach hinten fort und löst sich, wenn überhaupt, nur langsam wieder auf.

6 Erweiterungen/Ergänzungen

Das vorliegende Unterrichtsmodul kann man in verschiedene Richtungen verallgemeinern.

Man kann versuchen, auch Überholvorgänge, mehrspurige Straßen oder den Übergang von einer zwei- zu einer einspurigen Straße (Reißverschlussprinzip) zu modellieren.

Man kann die Modelle auch erweitern, beispielsweise um Kreuzungen oder Kreisverkehre, um den Verkehrsfluss unterschiedlicher Verkehrssteuerungen zu vergleichen.

Bei vorhandenen Programmierkenntnissen können die (oder interessierte) Schüler/innen die entsprechenden einfachen Algorithmen auch programmieren und die Ergebnisse visualisieren.

Die dem Unterrichtsmodul beigefügten Programme wurden in leicht abgewandelter Form durch Schüler/innen der Klassen 9 bis 13 entwickelt.

Eine Erweiterung des Spiels des Lebens ist die Anwendung von zellulären Automaten auf dynamische Systeme wie etwa Räuber-Beute-Modelle. Ein Beispiel hierfür ist eine Insel, auf der Hasen und Füchse leben. Dann kann man beobachten, dass ein Anwachsen der Hasenpopulation auch ein Anwachsen der Zahl der Füchse zur Folge hat, bis so viele Füchse da sind, dass die Hasenpopulation wieder geringer wird, was wiederum auch eine Reduktion der Zahl der Füchse zur Folge hat, so dass sich die Hasen wieder vermehren können usw.

Ein entsprechendes Computerprogramm, in dem ein derartiges Räuber-Beute-Modell realisiert ist, gehört zu den sonstigen Materialien dieses Unterrichtsmoduls (vgl. Abschnitt 7.1.2).

7 Unterrichtsmaterialien

7.1 Computerprogramme

Zu diesem Unterrichtsmodul gehören auch einige Computerprogramme, die von der Lehrkraft entweder zu Demozwecken oder von den Schüler/innen zum eigenen Experimentieren, Beobachten und Analysieren verwendet werden können. Diese Computerprogramme sind in der Programmiersprache Python geschrieben (Version 2.6.x oder 2.7.x). Python ist frei verfügbar und kann über die Web-Seite www.python.org frei heruntergeladen werden. Dort finden sich auch entsprechende Tutorials etc.

Python wurde mit dem Ziel entwickelt, das Programmieren für den Programmierer möglichst einfach zu machen. Daher kann man Python mit relativ wenig Aufwand so weit lernen, dass man alle in der Schule vorkommenden Algorithmen problemlos programmieren kann. Wir haben dies mehrfach mit (heterogenen) Gruppen von Schülerpraktikanten der Klassen 9 - 13 erprobt und sehr gute Erfahrungen mit einer zwei- bis dreitägigen Einführung in Python gemacht.

Auf Wunsch können wir Lehrkräften auch entsprechendes Material zur Verfügung stellen.

Python ist nicht die schnellste Programmiersprache und nach unseren Erfahrungen in der Ausführung etwa einen Faktor 30 langsamer als entsprechende optimierte C-Programme. Der Aufwand, C oder eine vergleichbare Programmiersprache zu lernen oder einen komplizierten Algorithmus in C zu programmieren, ist dafür aber wesentlich höher als bei Python.

7.1.1 Computerprogramm zum "Spiel des Lebens"

Das Computerprogramm `gameoflife.py` simuliert das "Spiel des Lebens" auf einem Spielfeld von 30×30 Zellen. Lebende Zellen werden durch '0', tote durch '.' gekennzeichnet. Die Anfangsbelegung wird zufällig erzeugt, so dass unterschiedliche Läufe auch zu unterschiedlichen Ausgaben und Ergebnissen führen. Die Schüler können beobachten, wie sich die Zellverbände über viele Generationen entwickeln. Dabei kann man unterschiedliche Lebensformen beobachten. Manche sterben aus, andere sind stabil, einige können sich fortbewegen. Wieder andere lokale Zellverbände werden aussterben.

Dieses Programm kann als Demo eingesetzt oder auch von den Schüler/innen selbst verwendet werden.

7.1.2 Computerprogramm zur Analyse eines einfachen Räuber-Beute-Modells

Man kann zelluläre Automaten auch benutzen, um dynamische Systeme wie etwa Räuber-Beute-Modelle nachzubilden.

Das Computerprogramm `hf.py` simuliert eine Hasen- und Fuchspopulation auf einer quadratischen Insel. Lässt man dieses Programm laufen, so kann man beobachten, dass ein Anwachsen der Hasenpopulation auch ein Anwachsen der Zahl der Füchse zur Folge hat, bis so viele Füchse da sind, dass die Hasenpopulation wieder geringer wird, was wiederum auch eine Reduktion der Zahl der Füchse zur Folge hat, so dass sich die Hasen wieder vermehren können usw. Typisch ist sich also ein zyklisches Verhalten. Dabei können natürlich im Einzelfall auch eine oder beide Populationen aussterben.

In diesem Programm werden die Anfangspopulationen zufällig gesetzt, und die Füchse bewegen sich zufallsgesteuert, so dass die Entwicklungen in jedem Lauf unterschiedlich sind. Man kann jeweils die Entwicklung der Populationen beobachten. Am Ende erscheint eine Tabelle, welche die zeitliche Entwicklung der beiden Populationen wiedergibt.

Eingabeparameter sind die Anzahl der Zellen in jeder Dimension und die Anzahl der Generationen, die man beobachten will. Die Anzahl der Zellen sollte nicht zu niedrig gewählt werden, weil sonst ein Aussterben einer oder beider Populationen wahrscheinlich wird. Eine gute Wahl ist z.B. 40.

7.1.3 Computerprogramm zur Simulation eines einfachen Verkehrsmodells

Im Computerprogramm `verkehr0.py` ist das in Abschnitt 3.1 bzw. im Arbeitsblatt *Ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation* beschriebene Verkehrsmodell implementiert. Man kann dieses Programm nutzen, um die Auswirkungen von unterschiedlichen Verkehrsdichten auf die Verkehrsentwicklung und Stauentstehung in diesem Modell zu analysieren (vgl. hierzu das Arbeitsblatt *Analyse eines einfachen Verkehrsmodells*).

Über Eingabeparameter lassen sich die Länge der betrachteten Rundstraße, die Anzahl der Autos (und damit die Verkehrsdichte) und die Anzahl der betrachteten Zeitschritte variieren.

7.1.4 Computerprogramm zur Simulation eines einfachen Verkehrsmodells mit Trödelfaktor

Das in Abschnitt 3.2 beschriebene einfache Verkehrsmodell mit Trödelfaktor ist in dem Computerprogramms `verkehr_tf.py` implementiert worden. Man kann dieses Programm einsetzen, um die Verkehrsentwicklung und Stauentstehung in diesem Modell zu analysieren (vgl. hierzu das Arbeitsblatt *Analyse eines einfachen Verkehrsmodells mit Trödelfaktor*).

Über Eingabeparameter lassen sich die Länge der betrachteten Rundstraße, die Anzahl der Autos (und damit die Verkehrsdichte), die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrer trödelt, und die Anzahl der betrachteten Zeitschritte variieren.

7.2 Arbeitsblätter

Arbeitsblatt: Das “Spiel des Lebens” und zelluläre Automaten

Das “Spiel des Lebens” (engl. Game of Life) ist ein einfaches Modell für die Ausbreitung einfacher Lebewesen. Das Spielfeld besteht aus quadratischen Zellen. Jede Zelle kann entweder leben oder tot sein. Neue Generationen von Zellen entwickeln sich nach einigen einfachen Regeln. Die nächste Generation wird direkt *und ausschließlich* aus dem Zustand der vorherigen Generation ermittelt. Dabei geht man folgendermaßen vor:

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei oder mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt (Einsamkeit bzw. Nahrungsmangel). Hierbei zählen auch diagonal aneinander stoßende Zellen als Nachbarn.
2. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt munter weiter.
3. Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird lebendig.

Aufgabe 1: In der folgenden Zeichnung siehst du ein System von quadratischen Zellen. Lebende Zellen sind mit 1 gekennzeichnet. Wie werden sich die Zellen nach den obigen Regeln weiterentwickeln?

				1	
	1	1		1	
			1		
		1	1		
	1		1		

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Zelluläre Automaten: Das “Spiel des Lebens” ist ein Beispiel für eine Modellierung mit einem sogenannten *zellulären Automaten*. Kennzeichen eines zellulären Automaten sind:

1. *Zellraum:* Das gesamte Modell besteht aus Zellen. Alle Zellen haben die gleiche Geometrie.
2. *Zustandsmenge:* Jede Zelle nimmt in einem Zeitpunkt nur einen von mehreren möglichen Zuständen an.
3. *Vorangehen in der Zeit:* Man geht nur in einzelnen Zeitschritten (Generationen) voran.
4. *Übergang zu einer neuen Generation:* Der Übergang zu einer neuen Generation erfolgt nach festen Regeln. Dabei benutzt jede Zelle nur Informationen über sich und eine gewisse Nachbarschaft von Zellen.

Aufgabe 2: Überprüfe, ob beim “Spiel des Lebens” alle Kriterien eines zellulären Automaten erfüllt sind.

Arbeitsblatt: Das “Spiel des Lebens” und zelluläre Automaten

Lösungen der Aufgaben:

Aufgabe 1:

				1	
	1	1		1	
			1		
		1	1		
	1		1		

$\rightsquigarrow$

			1		
		1		1	
	1			1	
		1	1		
			1		

$\rightsquigarrow$

			1		
		1		1	
	1			1	
		1	1	1	
		1	1		

Aufgabe 2:

1. *Zellraum:* Das gesamte Modell besteht aus Zellen. Alle Zellen haben die gleiche Geometrie. Dieses Kriterium ist beim “Spiel des Lebens” offensichtlich erfüllt: Das Spielfeld besteht aus quadratischen Zellen.

2. *Zustandsmenge:* Jede Zelle nimmt in einem Zeitpunkt nur einen von mehreren möglichen Zuständen an. Dieses Kriterium ist erfüllt: Jede Zelle kann in einem Zeitpunkt nur leben oder tot sein.

3. *Vorangehen in der Zeit:* Man geht nur in einzelnen Zeitschritten (Generationen) voran. Auch dieses Kriterium ist beim “Spiel des Lebens” offensichtlich erfüllt.

4. *Übergang zu einer neuen Generation:* Der Übergang zu einer neuen Generation erfolgt nach festen Regeln. Dabei benutzt jede Zelle nur Informationen über sich und eine gewisse Nachbarschaft von Zellen. Auch dieses Kriterium ist beim “Spiel des Lebens” erfüllt: Die Regeln sind oben auf dem Arbeitsblatt in drei Schritten beschrieben. Dabei gehen nur Informationen über die aktuelle Zelle sowie die Nachbarzellen in die Regeln ein.

Arbeitsblatt: Stabile und aussterbende Lebensformen beim “Spiel des Lebens”

Das “Spiel des Lebens” (engl. Game of Life) ist ein einfaches Modell für die Ausbreitung einfacher Lebewesen. Das Spielfeld besteht aus quadratischen Zellen. Jede Zelle kann entweder leben oder tot sein. Neue Generationen von Zellen entwickeln sich nach einigen einfachen Regeln. Die nächste Generation wird direkt aus dem Zustand der vorherigen Generation ermittelt. Dabei geht man folgendermaßen vor:

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei oder mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt (Einsamkeit bzw. Nahrungsmangel). Hierbei zählen auch diagonal aneinander stoßende Zellen als Nachbarn.
2. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt munter weiter.
3. Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird lebendig.

Aufgabe 1: Überlege, wie sich die folgenden Zellverbände beim “Spiel des Lebens” weiterentwickeln. Untersuche dazu so viele nachfolgende Generationen, wie dir notwendig erscheinen.

(a)

	1	1	
	1	1	

(b)

		1		
	1		1	
		1		

(c)

	1	1	1	

(d)

	1		1	
	1		1	

(e)

	1		1	
		1		
	1		1	

Aufgabe 2: Betrachte beim “Spiel des Lebens” ein Spielfeld aus
(a) 2×2 (b) 3×3 (c) 4×4 (d) 10×10 (e) $n \times n$
Zellen.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten bestehen jeweils, um die kleinen Quadrate mit lebenden und toten Zellen zu besetzen? Nutze dein Ergebnis, um eine grobe Schätzung dafür zu erhalten, wie viele unterschiedliche Zellgenerationen jeweils höchstens möglich sind, bevor sich der Zustand einer vorherigen Generation spätestens wiederholt?

Arbeitsblatt: Stabile und aussterbende Lebensformen beim “Spiel des Lebens”

Lösungen der Aufgaben:

Aufgabe 1:
(a) und (b) stellen stabile Lebensformen dar, die sich beim Übergang zur nächsten Generation nicht ändern.

Die Lebensform (c) oszilliert immer zwischen den folgenden beiden Zuständen hin und her:

	1	1	1	

		1		
		1		
		1		

Die Lebensform (d) stirbt in der nächsten Generation aus.
Die Lebensform (e) geht in der nächsten Generation in die Lebensform (b) über und bleibt dann stabil.

Aufgabe 2: Jede Zelle hat nur zwei mögliche Zustände: Sie kann leben oder tot sein. Die Anzahl aller Möglichkeiten, das Spielfeld zu besetzen, hängt von der Anzahl N aller Zellen des Spielfeldes ab und beträgt 2^N.

Bei (a) hat man $N = 4$ Zellen und somit $2^4 = 16$ unterschiedliche Möglichkeiten. Dies bedeutet, dass sich nach spätestens 16 Generationen der Zustand einer bereits vorher einmal erzeugten Generation wiederholt.

Die entsprechenden Antworten bei den anderen Teilaufgaben sind:

(b) Hier hat man $N = 3 \cdot 3 = 9$ Zellen. Somit gibt es $2^9 = 512$ verschiedene Möglichkeiten bzw. Generationen.

(c) Hier ist $N = 4 \cdot 4 = 16$. $2^{16} = 65536$ verschiedene Möglichkeiten oder Generationen.

(d) Hier beträgt die Anzahl der Zellen $N = 10 \cdot 10 = 100$. Somit gibt es $2^{10 \cdot 10} = 2^{100} \approx 10^{30}$ verschiedene Möglichkeiten oder Generationen.

(e) Hier hat man $N = n \cdot n$ Zellen. Somit gibt es $2^{n \cdot n}$ verschiedene Möglichkeiten oder Generationen.

Arbeitsblatt: Zelluläre Automaten zur Verkehrssimulation

Wir wollen zelluläre Automaten zur Verkehrssimulation einsetzen. Dazu betrachten wir einen einspurigen, nur in eine Richtung befahrbaren Autobahnabschnitt. Überholen ist nicht erlaubt.

Dazu müssen wir uns überlegen, wie wir die Grundcharakteristika eines zellulären Automaten auf den Straßenverkehr übertragen können.

Kennzeichen eines zellulären Automaten sind:

1. *Zellraum:* Das gesamte Modell besteht aus Zellen. Alle Zellen haben die gleiche Geometrie.
2. *Zustandsmenge:* Jede Zelle nimmt in einem Zeitpunkt nur einen von mehreren möglichen Zuständen an.
3. *Vorangehen in der Zeit:* Man geht nur in einzelnen Zeitschritten (Generationen) voran.
4. *Übergang zu einer neuen Generation:* Der Übergang zu einer neuen Generation erfolgt nach festen Regeln. Dabei benutzt jede Zelle nur Informationen über sich und eine gewisse Nachbarschaft von Zellen.

Aufgabe: Überlege gemeinsam mit deinem/deinen Nachbarn, wie ein zellulärer Automat für den Straßenverkehr aussehen und wie man das Verhalten von Autos simulieren könnte. Sucht dazu Antworten auf die folgenden Fragen:

1. Wie sollten die einzelnen Zellen aussehen?
2. Wie groß sollte eine Zelle mindestens sein?
3. Welche Zustände kann eine Zelle einnehmen?
4. Unter welchen Bedingungen kann ein Fahrzeug beschleunigen?
5. Unter welchen Bedingungen muss ein Fahrzeug bremsen?

Arbeitsblatt: Zelluläre Automaten zur Verkehrssimulation

Info für Lehrkräfte: Voraussetzung für den Einsatz dieses Arbeitsblattes ist, dass die Schüler/innen schon ein Beispiel eines zellulären Automaten (z.B. das *Spiel des Lebens*) kennengelernt haben.

Dieses Arbeitsblatt soll dazu dienen, dass sich die Schüler/innen grundsätzliche Gedanken zur Simulation von Verkehr mit zellulären Automaten machen und entsprechende Ansätze kritisch miteinander diskutieren. Die Aufgabenstellung ist offen, so dass ganz unterschiedliche Lösungsansätze denkbar sind.

Erschwerend kommt bei der Aufgabenstellung hinzu, dass für ein realistisches, konsistentes Modell die Antworten auf alle Fragen Berücksichtigung finden müssen.

Man kann im Unterricht auf einige der von den Schüler/innen erarbeiteten Vorstellungen eingehen. Das im Arbeitsblatt *Ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation* vorgestellte Modell kann dann als eine Antwort auf die gestellten Fragen verstanden und vorgestellt werden.

Das Arbeitsblatt ist für Gruppenarbeit konzipiert.

Arbeitsblatt: Ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation

Zelluläre Automaten werden in der Praxis auch für Verkehrssimulationen genutzt, z.B. in Nordrhein-Westfalen zur Stauprognose oder in der Schweiz zur Simulation des gesamten Individualverkehrs. Ein einfaches derartiges Modell lässt sich folgendermaßen beschreiben:
Wir betrachten eine einfache einspurige Straße, auf der sich Autos nur in eine Richtung (ohne Überholvorgänge) fortbewegen. Diese Straße teilen wir in Zellen von 7,50 m Länge ein. In jeder Zelle kann sich höchstens ein Auto befinden. Autos können sich pro Zeitschritt nur um eine ganze Zahl von Zellen vorwärts bewegen. Wir gehen immer in Zeitschritten von 1 s Dauer voran. Eine Vorwärtsbewegung um eine Zelle pro Zeitschritt entspricht einer Geschwindigkeit von

$$\frac{7,5\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = 27\ \mathrm{km/h}\ .$$

Einer Vorwärtsbewegung von 5 Zellen pro Sekunde entspricht dann einer Geschwindigkeit von $5 \cdot 27\ \mathrm{km/h} = 135\ \mathrm{km/h}$. Da dies in etwa der Richtgeschwindigkeit auf den deutschen Autobahnen entspricht, setzen wir dies als Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$ an. Autos bewegen sich also in jedem Zeitschritt um 0 bis 5 Zellen vorwärts.

Unser Modell besteht in jedem Zeitschritt aus drei Teilschritten. In den ersten beiden Teilschritten wird die neue Geschwindigkeit des Fahrzeugs so ermittelt, dass Kollisionen verhindert werden. Erst im dritten Teilschritt bewegen sich die Fahrzeuge vorwärts:

1. *Beschleunigen:* Jedes Fahrzeug erhöht seine Geschwindigkeit um 1 Zelle pro Zeiteinheit, bis es die Maximalgeschwindigkeit erreicht hat.
2. *Bremsen:* Jedes Fahrzeug prüft, ob es mit der gerade berechneten Geschwindigkeit auf ein anderes Fahrzeug auffahren oder dieses überholen würde. Ist dies der Fall, so reduziert es seine Geschwindigkeit sofort so weit, dass eine Kollision vermieden wird.
3. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug bewegt sich einen Zeitschritt mit der aktuellen Geschwindigkeit vorwärts.

Dies können wir in einem einfachen Algorithmus präzisieren. Wir haben $i = 1, \ldots, n$ Fahrzeuge. Jedes Fahrzeug hat eine individuelle Eigengeschwindigkeit v_i. Die Höchstgeschwindigkeit ist $v_{\max} = 5$. Jeder der folgenden drei Teilschritte wird dann gleichzeitig für alle Fahrzeuge durchgeführt:

1. *Beschleunigen:* $v_i = \min\{v_i + 1, v_{\max}\}$
2. *Bremsen:* Falls $v_i > d(i, i+1)$, so reduziere v_i auf $v_i = d(i, i+1)$.
   Hierbei ist $d(i, i+1)$ die *Anzahl der leeren Zellen* zwischen Fahrzeug i und Fahrzeug $i+1$.
3. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug i bewegt sich v_i Zellen vorwärts.

Aufgabe: In der folgenden Skizze bewegen sich die Fahrzeuge, die durch eine eingerahmte Ziffer, welche die aktuelle Geschwindigkeit angibt, gekennzeichnet sind, von links nach rechts. Ein Schritt dieses Algorithmus mit den drei zugehörigen Teilschritten ist bereits ausgeführt worden. Führe einen weiteren Schritt des Algorithmus aus.

	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$		$\boxed{0}$		$\boxed{3}$			$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	
1.	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$		$\boxed{1}$		$\boxed{4}$			$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	
2.	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{2}$			$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	
3.	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$			$\boxed{2}$	$\boxed{0}$		
1.												
2.												
3.												

Arbeitsblatt: Ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation

Infos für Lehrkräfte: Der auf dem Arbeitsblatt beschriebene Algorithmus ist in Aufgabe 1 bereits einmal angewendet worden. Hier könnte man vor allem bei jüngeren Schüler/innen die Durchführung der drei Teilschritte des Algorithmus noch einmal im Detail an dem vorgegebenen Beispiel erläutern, bevor die Schüler/innen versuchen, die Aufgabe zu bearbeiten.

Im Anschluss an die Bearbeitung der Aufgabe auf diesem Arbeitsblatt bietet sich eine systematische Analyse des Modells anhand des Computerprogramms `verkehr0.py` an (vgl. Abschnitt 7.1.3 bzw. das Arbeitsblatt *Analyse eines einfachen Verkehrsmodells*).

	0	1	2		0		3			4	2
1.	1	2	3		1		4			5	3
2.	0	0	1		1		2			0	3
3.	0	0		1		1			2	0	
1.	1	1		2		2			3	1	
2.	0	1		1		2			0	1	
3.	0		1		1			2	0		1

Arbeitsblatt: Analyse eines einfachen Verkehrsmodells

In dem Computerprogramm `verkehr0.py` ist ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation mit Hilfe des folgenden zellulären Automaten implementiert:

> Die Straße ist in Zellen einer Länge von 7,50 m unterteilt. In jeder Zelle kann sich höchstens ein Fahrzeug befinden. Wir haben $i = 1, \ldots, n$ Fahrzeuge. Jedes Fahrzeug hat eine individuelle Eigengeschwindigkeit $v_i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Höchstgeschwindigkeit ist $v_{\max} = 5$.
> Jeder Zeitschritt besteht aus drei Teilschritten. In den ersten beiden Teilschritten wird die neue Geschwindigkeit des Fahrzeugs so ermittelt, dass Kollisionen verhindert werden. Erst im dritten Teilschritt bewegen sich die Fahrzeuge vorwärts. Jeder der drei Teilschritte wird gleichzeitig für alle Fahrzeuge durchgeführt.
>
> 1. *Beschleunigen:* $v_i = \min\{v_i + 1, v_{\max}\}$
> 2. *Bremsen:* Falls $v_i > d(i, i+1)$, so reduziere v_i auf $v_i = d(i, i+1)$.
>   Hierbei ist $d(i, i+1)$ die *Anzahl der leeren Zellen* zwischen Fahrzeug i und Fahrzeug $i + 1$.
> 3. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug i bewegt sich v_i Zellen vorwärts.

Im Programm bewegen sich die Fahrzeuge im Uhrzeigersinn. Die Ringstraße wird in der Ausgabe des Programms der Einfachheit halber als Rand eines Quadrats ausgegeben. Die Ecken haben aber keinerlei besondere Bedeutung für die Simulation. Das Programm erwartet als Eingaben die Anzahl der Zellen, aus denen die Straße besteht (z.B. 120), die Anzahl der Autos auf der Straße sowie die Anzahl der durchzuführenden Zeitschritte.

Zu Beginn des Programms werden die Fahrzeuge zufällig auf der Straße verteilt; auch die Anfangsgeschwindigkeiten sind zufällig gewählt. Dies führt häufig dazu, dass am Anfang einer Simulation Staus entstehen, die sich bei niedriger Verkehrsdichte jedoch rasch auflösen.

Benutze das Programm, um folgende Aufgaben zu bearbeiten:

Aufgaben:

1. Wie verhält sich der Verkehr in dem im Programm umgesetzten Modell, wenn ein Auto im Durchschnitt mindestens 6 Zellen zur Verfügung hat? Versuche eine Begründung für dieses Verhalten zu finden.
2. Erhöhe die Verkehrsdichte, so dass ein Auto im Durchschnitt weniger als 6 (5, 4) Zellen zur Verfügung hat und beobachte das Verkehrsverhalten.
   (a) Was passiert, wenn die Verkehrsdichte erhöht wird?
   (b) Ist die Anzahl der entstehenden Staus konstant?
   (c) Wie bewegen sich Staus fort?
3. Inwieweit entspricht dieses Modell dem normalen Straßenverkehr? Inwieweit nicht?

Arbeitsblatt: Analyse eines einfachen Verkehrsmodells

Zusatzinfos für Lehrkräfte: Für die Bearbeitung der Aufgaben ist das diesem Modul beiliegende Python-Programm `verkehr0.py` erforderlich.

Die Aufgaben können auch in Gruppen zu zwei oder drei Schüler/innen bearbeitet werden.

Lösungen der Aufgaben:

1. Solange ein Fahrzeug im Durchschnitt mindestens 6 Zellen zur Verfügung hat, erreichen nach einer Anfangsphase, die durch die inhomogene Start- und Geschwindigkeitsverteilung der Fahrzeuge verursacht ist, alle Fahrzeuge die Höchstgeschwindigkeit von 5 Zellen pro Zeiteinheit und bewegen sich damit fort.

   Um diese Höchstgeschwindigkeit zu erreichen und zu behalten, benötigen die Fahrzeuge auf Dauer genau 6 Zellen, nämlich eine Zelle für das Fahrzeug selbst und weitere 5 freie Zellen vor jedem Fahrzeug.

2. (a) Wenn die Verkehrsdichte erhöht wird, treten zuerst Stellen auf, an denen die Fahrzeuge sich nicht mehr mit der Höchstgeschwindigkeit fortbewegen. Bei weiterer Erhöhung der Verkehrsdichte kommt es zu einem oder mehreren Staus.

   (b) Die Anzahl der entstehenden Staus ist nicht konstant, sondern hängt auch von der Länge der Straße und der anfänglichen Verteilung von Fahrzeugen und Geschwindigkeiten ab. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten mehrerer Staus und die Zeit, in der sich die Fahrzeuge in einem Stau befinden, nimmt mit der Verkehrsdichte zu.

   (c) Die Staus bewegen sich gleichmäßig gegen die Fahrrichtung fort.

3. In allen Fällen entsteht nach dem Ausgleich der inhomogenen Anfangsverteilung eine stationäre Verkehrssituation. Der Verkehrsfluss verschiebt sich lediglich entgegen der Fahrtrichtung.

   Das Modell kann die bei höherem Verkehrsaufkommen plötzlich auftretenden Staus erzeugen. Auch das gleichzeitige Auftreten von Teilstrecken, auf denen mit hohen Geschwindigkeiten gefahren werden kann, und von Teilstrecken, auf denen ein Stau entstanden ist, werden vom Modell dargestellt.

   Das völlig stationäre Verkehrsverhalten (und das völlig gleichförmige Verhalten aller Fahrzeuge) ist jedoch weit von der Realität entfernt.

   In der Realität bewegen sich die Fahrzeuge auch mit größeren Geschwindigkeitsunterschieden fort (LKWs mit nur 80 km/h, Traktoren mit noch niedrigeren Geschwindigkeiten). Will man dies berücksichtigen, so muss man z.B. auch Überholvorgänge mit simulieren.

Arbeitsblatt: Einführung eines Trödelfaktors in das Modell zur Verkehrssimulation

In dem einfachen Modell zur Verkehrssimulation verhält sich der Verkehr stationär. Alle Teilnehmer verhalten sich völlig gleichartig. Dies entspricht nicht dem Verhalten, wie man es im Verkehr beobachten kann:

- Die Fahrzeuge bewegen sich in der Regel nicht alle mit der gleichen Geschwindigkeit und völlig gleichförmig vorwärts.
- Es gibt Überreaktionen beim Bremsen, die die nachfolgenden Fahrzeuge ebenfalls zum heftigen Bremsen zwingen, oder auch, gerade nach Staus oder bei auf Grün schaltenden Ampeln zu beobachten, ein verzögertes Beschleunigen.

Ein derartiges Verhalten kann in unserem einfachen Modell durch die Einführung eines sogenannten Trödelfaktors nachgebildet werden. Der Algorithmus sieht dann folgendermaßen aus:

1. *Beschleunigen:* $v_i = \min\{v_i + 1, v_{\max}\}$
2. *Bremsen:* Falls $v_i > d(i, i+1)$, so reduziere v_i auf $\;v_i = d(i, i+1)\;$.
   Hierbei ist $d(i, i+1)$ die *Anzahl der leeren Zellen* zwischen Fahrzeug i und Fahrzeug $i + 1$.
3. *Trödeln:* Mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p wird die Geschwindigkeit v_i um 1 reduziert: $v_i = \max\{v_i - 1, 0\}$ mit Wahrscheinlichkeit p.
4. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug i bewegt sich v_i Zellen vorwärts.

Für $p = 0$ erhalten wir wieder das ursprüngliche Modell.

Aufgaben:

1. Beschreibe den Einfluss des Trödelns auf die Entwicklung der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs mit deinen eigenen Worten.
2. Erläutere, wieso die Einführung des Trödelns im Modell
   (a) ein mögliches Verzögern beim Beschleunigen,
   (b) ein Trödeln bei freier Fahrt,
   (c) eine Überreaktion beim Bremsen

   nachbilden kann.

Arbeitsblatt: Einführung eines Trödelfaktors in das Modell zur Verkehrssimulation

Infos für Lehrkräfte: Für dieses Arbeitsblatt wird vorausgesetzt, dass vorher das Arbeitsblatt *Ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation* behandelt worden ist.

Im Anschluss an die Bearbeitung der Aufgabe auf diesem Arbeitsblatt bietet sich eine systematische Analyse des Modells anhand des Computerprogramms `verkehr_tf.py` an (vgl. Abschnitt 7.1.4 bzw. das Arbeitsblatt *Analyse eines einfachen Verkehrsmodells mit Trödelfaktor*).

Lösung der Aufgaben:

1. Der neu eingeführte Teilschritt im Algorithmus, der das Trödeln modelliert, reduziert die nach den Teilschritten Beschleunigen und Bremsen ermittelten Geschwindigkeiten v_i eines jeden Fahrzeugs mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p um eine Zelle pro Zeitschritt.

2. (a) Ein mögliches Verzögern beim Beschleunigen wird modelliert, weil ein Fahrzeug selbst bei freier Fahrt mit der Wahrscheinlichkeit p weiter mit der alten Geschwindigkeit fährt. Die Wirkung des Beschleunigungsteilschritts wird dann durch das Trödeln wieder aufgehoben.

   (b) Bei freier Fahrt fahren Fahrzeuge mit einer Geschwindigkeit von 5 Zellen pro Zeitschritt. Das Trödeln reduziert diese Geschwindigkeit mit einer Wahrscheinlichkeit p auf 4 Zellen pro Zeitschritt.

   (c) Im Teilschritt Bremsen wird dafür gesorgt, dass ein Fahrzeug nicht auf ein anderes auffahren kann. Mit der Wahrscheinlichkeit p bewegt sich das Fahrzeug jedoch noch um eine Zelle pro Zeiteinheit langsamer fort. Dies kann als Überreaktion beim Bremsen interpretiert werden.

Arbeitsblatt: Analyse eines einfachen Verkehrsmodells mit Trödelfaktor

In dem Computerprogramm `verkehr_tf.py` ist ein einfaches Modell zur Verkehrssimulation mit Hilfe des folgenden zellulären Automaten implementiert:

Die Straße ist in Zellen einer Länge von 7,50 m unterteilt. In jeder Zelle kann sich höchstens ein Fahrzeug befinden. Wir haben $i = 1, \ldots, n$ Fahrzeuge. Jedes Fahrzeug hat eine individuelle Eigengeschwindigkeit $v_i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Höchstgeschwindigkeit ist $v_{\max} = 5$.
Jeder Zeitschritt besteht aus vier Teilschritten. In den ersten beiden Teilschritten wird die neue Geschwindigkeit des Fahrzeugs so ermittelt, dass Kollisionen verhindert werden. Im dritten Teilschritt wird ein individuelles zufallsgesteuertes Verhalten jedes einzelnen Fahrzeugs simuliert. Erst im vierten Teilschritt bewegen sich die Fahrzeuge vorwärts. Jeder der vier Teilschritte wird gleichzeitig für alle Fahrzeuge durchgeführt.

1. *Beschleunigen:* $v_i = \min\{v_i + 1, v_{\max}\}$
2. *Bremsen:* Falls $v_i > d(i, i+1)$, so reduziere v_i auf $v_i = d(i, i+1)$.
   Hierbei ist $d(i, i+1)$ die *Anzahl der leeren Zellen* zwischen Fahrzeug i und Fahrzeug $i + 1$.
3. *Trödeln:* Mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p wird die Geschwindigkeit v_i um 1 reduziert: $v_i = \max\{v_i - 1, 0\}$ mit Wahrscheinlichkeit p.
4. *Bewegen:* Jedes Fahrzeug i bewegt sich v_i Zellen vorwärts.

Im Programm bewegen sich die Fahrzeuge im Uhrzeigersinn. Die Ringstraße wird in der Ausgabe des Programms der Einfachheit halber als Rand eines Quadrats ausgegeben. Die Ecken haben aber keinerlei besondere Bedeutung für die Simulation. Das Programm erwartet als Eingaben die Anzahl der Zellen, aus denen die Straße besteht (z.B. 120), die Anzahl der Autos auf der Straße sowie die Anzahl der durchzuführenden Zeitschritte.

Zu Beginn des Programms werden die Fahrzeuge zufällig auf der Straße verteilt; auch die Anfangsgeschwindigkeiten sind zufällig gewählt. Dies führt häufig dazu, dass am Anfang einer Simulation Staus entstehen, die sich bei niedriger Verkehrsdichte jedoch rasch auflösen.

Benutze das Programm, um nachstehende Aufgaben zu bearbeiten. Verwende dabei eine Trödelwahrscheinlichkeit von 20% und achte darauf, dass die Straße lang genug ist.

Aufgaben:

1. Wie verhält sich der Verkehr in dem im Programm umgesetzten Modell, wenn ein Auto im Durchschnitt mindestens 10 Zellen zur Verfügung hat? Versuche eine Begründung für dieses Verhalten zu finden.
2. Erhöhe die Verkehrsdichte, so dass ein Auto im Durchschnitt 6 Zellen zur Verfügung hat und vergleiche das Verkehrsverhalten mit dem des Modells ohne Trödelfaktor (setze hierfür einfach $p = 0$).
3. Erhöhe die Verkehrsdichte weiter, so dass ein Auto im Durchschnitt 4 Zellen zur Verfügung hat und beschreibe das Verkehrsverhalten.
4. Inwieweit entspricht dieses Modell dem normalen Straßenverkehr? Inwieweit nicht?

Arbeitsblatt: Analyse eines einfachen Verkehrsmodells mit Trödelfaktor

Zusatzinfos für Lehrkräfte: Für die Bearbeitung der Aufgaben ist das diesem Modul beiliegende Python-Programm `verkehr_tf.py` erforderlich.

Es ist sinnvoll, vor diesem Arbeitsblatt insbesondere die Inhalte der Arbeitsblätter *Analyse eines einfachen Verkehrsmodells* und *Einführung eines Trödelfaktors in das Modell zur Verkehrssimulation* bearbeitet zu haben.

Die Aufgaben können auch in Gruppen zu zwei oder drei Schüler/innen bearbeitet werden.

Lösungen der Aufgaben:

1. Wenn ein Fahrzeug im Durchschnitt mindestens 10 Zellen zur Verfügung hat, fahren nach einer Anfangsphase, die durch die inhomogene Start- und Geschwindigkeitsverteilung der Fahrzeuge verursacht ist, die meisten Fahrzeuge die Höchstgeschwindigkeit von 5 Zellen pro Zeiteinheit und bewegen sich damit fort. Das Trödeln hat nur einen lokalen Einfluss und behindert den freien Verkehrsfluss kaum. Dies kann man sich damit erklären, dass jedes Fahrzeug im Schnitt einen Puffer von vier freien Zellen hat (eine Zelle braucht es selbst, 5 weitere vor sich, um mit Höchstgeschwindigkeit fahren zu können). Insgesamt stehen aber pro Fahrzeug durchschnittlich 10 Zellen zur Verfügung, so dass ein Trödeln eines vorausfahrenden Fahrzeugs im Durchschnitt erst nach 4 Zeiteinheiten zu einem Abbremsen des nachfolgenden Fahrzeugs führt (wenn dieses nicht selbst auch trödelt).

2. Bei einer durchschnittlichen Verkehrsdichte von einem Auto pro 6 Zellen fahren in dem Modell ohne Trödelfaktor nach einer Anfangsphase, in der die Inhomogenitäten durch die zufällige Startverteilung von Fahrzeugen und Geschwindigkeiten ausgeglichen werden, alle Fahrzeuge konstant mit Höchstgeschwindigkeit.

   Bei dem Modell mit Trödelfaktor treten spontan lokale Staus auf, die sich aber auch wieder auflösen können. Das Modell kann offensichtlich sogenannte *Staus aus dem Nichts* nachbilden, obwohl eigentlich genügend Raum für alle Fahrzeuge vorhanden ist, um mit Höchstgeschwindigkeit zu fahren.

3. Erhöht man die Verkehrsdichte auf durchschnittlich ein Fahrzeug pro 4 Zellen, so erhöht sich auch die Anzahl und die Länge der Staus. Allerdings gibt es auch immer noch freie Straßenabschnitte, auf denen die Fahrzeuge mit Maximalgeschwindigkeit fahren können.

4. Das Modell kann das Auftreten von sogenannten *Staus aus dem Nichts* reproduzieren. Am Beispiel der Verkehrsdichte von durchschnittlich einem Fahrzeug pro 6 Zellen erkennt man, dass neben der Verkehrsdichte offensichtlich auch das individuell verschiedene Verhalten von Fahrzeugen das Entstehen von Staus begünstigt.

   In der Realität bewegen sich die Fahrzeuge mit größeren Geschwindigkeitsunterschieden fort (LKWs mit nur 80 km/h, Traktoren mit noch niedrigeren Geschwindigkeiten). Will man dies berücksichtigen, so muss man z.B. auch Überholvorgänge mit simulieren.

Literatur

[1] H.-J. Bungartz, S. Zimmer, M. Buchholz und D. Pflüger. *Modellbildung und Simulation*. Springer-Verlag, 2009.

[2] K. Nagel und M. Schreckenberg. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I*, 2:2221-2229, Dezember 1992.

[3] `http://de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell`

[4] Los Alamos National Laboratory. *TRANSIMS - Transportation Analysis Simulation System.* `http://www.anl.gov/TRACC/Computing_Resources/transims.html`

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Transims` .

[6] `http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/Projects/Simulation/Traffic/motivation.html`

[7] `http://www.bpb.de/themen/PQWSE3,0,0,Luftverschmutzung\_durch\_Industrie\_Landwirtschaft\_und\_Haushalte.html`