

Kapitel 11

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

11.1 Vorbemerkungen, Definitionen

11.1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen (1. Ordnung)

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung

$$F(x, u, u') = 0$$

bei gegebener Funktion F . Mit dem Begriff der *klassischen Lösung* dieser DGL auf einem Intervall I bezeichnen wir eine Funktion

$$\varphi \in C_1(I), \text{ so daß } F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \text{ auf dem Intervall } I.$$

Eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung besitzt in der Regel (i.d.R.) eine Lösungsmannigfaltigkeit: In der Regel ist dies eine 1-dimensionale Schar von Funktionen; der Parameter wird dabei i.d.R. durch eine Anfangsbedingung

$$u(\xi) = \eta$$

festgelegt. “In der Regel” heißt hier und zukünftig: unter geeigneten (vernünftigen) Voraussetzungen.

11.1.2 Partielle Differentialgleichungen (1. Ordnung im \mathbb{R}^N)

Eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung im \mathbb{R}^N ist

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N; u; u_{x_1}, \dots, u_{x_N}) = 0$$

bei gegebener Funktion F .

Unter einer *klassischen Lösung* dieser DGL verstehen wir eine Funktion (hier $= \mathbb{R}$, allgemein auch \mathbb{C}):

$$\varphi \in C_1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ offen; } \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ so daß}$$

$$F(x_1, \dots, x_N; \varphi(x); \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x)) \equiv 0 \text{ auf } \Omega.$$

Wir verwenden auch die Schreibweisen

$$F(x, u, u_x) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_x = \nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} \right).$$

Beispiel 11.1 (im \mathbb{R}^2) Als Beispiel für eine partielle DGL betrachten wir

$$u_{x_1} = 0.$$

Gesucht ist $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ mit $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \equiv 0$.

Offenbar ist φ konstant bzgl. x_1 , die „allgemeine Lösung“ lautet also

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv w(x_2)$$

mit einer *beliebigen Funktion* w . △

Für eine klassische Lösung verlangen wir $\varphi \in C_1$. Damit muß auch $w \in C_1$ sein. ($w \in C_1$ braucht aber nicht zu gelten, wenn nur die Differentialgleichung erfüllt werden soll und man auf den klassischen Lösungsbegriff verzichtet.)

Bemerkung 11.1 Die Lösungsmannigfaltigkeit ist hier also durch *eine* frei wählbare Funktion charakterisiert. Die Festlegung erfolgt durch eine Anfangsbedingung: Eine Anfangskurve im \mathbb{R}^2 wird vorgegeben, und darauf werden Funktionswerte vorgeschrieben. »»

Aber Achtung !

Beispiel 11.2 Wir können im obigen Beispiel ($u_{x_1} = 0$) z.B. die folgenden beiden Anfangsbedingungen betrachten:

- (1) Anfangskurve : x_2 -Achse,
Anfangsbedingung: $u(0, x_2) = u_0(x_2)$ (u_0 gegeben)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0, x_2) = u_0(x_2) \\ \varphi(x_1, x_2) = w(x_2) \end{array} \right\} \implies w(x_2) = u_0(x_2) = \varphi(x_1, x_2)$$

Die AWA ist dann also eindeutig lösbar!

- (2) Anfangskurve : x_1 -Achse,
Anfangsbedingung: $u(x_1, 0) = u_0(x_1)$ (u_0 gegeben)

$$\varphi(x_1, x_2) = w(x_2) \implies \varphi(x_1, 0) = w(0) = \text{const} \stackrel{!}{=} u_0(x_1)$$

Damit haben wir: Eine Lösung der DGL mit dieser Anfangsbedingung existiert nur, falls u_0 konstant ist. Dann ist die Lösung aber nicht eindeutig.

Dies zeigt, daß diese Anfangsbedingung (genauer: diese Anfangskurve) problematisch ist. \triangle

Beispiel 11.3 (Beispiel im \mathbb{R}^N) Wir betrachten die DGL

$$u_{x_1} = 0 \quad \text{im } \mathbb{R}^N .$$

Gesucht ist $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_N)$ mit $\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1, \dots, x_N) \equiv 0$.

Offenbar ist $\varphi(x_1, \dots, x_N) = w(x_2, \dots, x_N)$ mit einer beliebigen Funktion

$w = w(x_2, \dots, x_N) \in C_1$ eine klassische Lösung dieser DGL. \triangle

Bemerkung 11.2 Die Lösungsmannigfaltigkeit einer DGL 1. Ordnung im \mathbb{R}^N ist i.d.R. durch eine beliebige Funktion von $N - 1$ „echten“ Variablen charakterisiert. \gg

11.2 Anfangswertaufgaben für (lineare) partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im \mathbb{R}^2 , Charakterisiken und Typeneinteilung

11.2.1 Differentialgleichungen 2. Ordnung im \mathbb{R}^N

Eine partielle DGL 2. Ordnung im \mathbb{R}^N läßt sich schreiben als

$$F(x_1, \dots, x_N; u; u_{x_1}, \dots, u_{x_N}; u_{x_1x_1}, \dots, u_{x_1x_j}, \dots, u_{x_Nx_N}) = 0$$

oder kurz

$$F(x, u, u_x, u_{xx}) = 0 .$$

Dabei ist $u_{xx} = (u_{x_i x_j})_{i,j=1,\dots,N}$ die „Matrix der 2. Ableitungen“.

Eine *klassische Lösung* dieser DGL ist eine Funktion $\varphi \in C_2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen), so daß $F(x, \varphi(x), \varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)) \equiv 0$ für $x \in \Omega$.

Wegen $\varphi \in C_2(\Omega)$ gilt $\varphi_{x_i x_j} = \varphi_{x_j x_i}$. Daher können auch in F die beiden Variablen $u_{x_i x_j}$ und $u_{x_j x_i}$ identifiziert werden!

Die *Lösungsmannigfaltigkeit* ist i.d.R. (problematisch, siehe unten!) durch zwei frei wählbare Funktionen von $N - 1$ echten Variablen charakterisiert.

Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall $N = 2; = \mathbb{R}$. Wir verwenden dabei auch die Bezeichnungen $x_1 = x, x_2 = y$.

11.2.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung im \mathbb{R}^2

Eine DGL 2. Ordnung im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$F(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 .$$

$$\qquad \qquad \qquad \uparrow$$

$$\qquad \qquad \qquad = u_{yx}, \text{ s. o.}$$

Spezialfälle, Bezeichnungen:

Eine DGL zweiter Ordnung heißt „*quasi-linear*“, falls

$$F = a(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} - r(x, y, u, u_x, u_y),$$

das heißt falls F linear in u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} ist. $H u(x, y) := a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy}$ heißt „*Hauptteil*“ der Differentialgleichung. Er bestimmt weitgehend das qualitative Verhalten der Lösung. Der Hauptteil heißt „*linear*“, falls

$$a = a(x, y), \quad b = b(x, y), \quad c = c(x, y) ,$$

d.h. wenn a, b, c nur von x und y , nicht aber von u und den Ableitungen von u abhängen.

Voraussetzung im folgenden: Die Koeffizienten a, b, c seien konstant. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$\boxed{a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = r(x, y, u, u_x, u_y)} \quad (11.1)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstant, $r : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Beispiel 11.4 (Prototypen)

- | | | | |
|-----|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (1) | $u_{xx} + u_{yy} = 0$ | ($a = c = 1, b = 0$) | Laplace-Gleichung |
| | $u_{xx} + u_{yy} = r(x, y)$ | | Poisson-Gleichung |
| (2) | $u_{xx} - u_{yy} = 0$ | ($a = -c = 1, b = 0$) | Wellengleichung |
| (3) | $u_{xx} - u_y = 0$ | ($a = 1, b = c = 0$) | Wärmeleitungs-gleichung |

Diese 3 Typen unterscheiden sich fundamental in ihren Lösungseigenschaften. Sie beschreiben auch ganz unterschiedliche Vorgänge in der Natur. \triangle

11.2.3 Vorüberlegung zur Formulierung einer Anfangswertaufgabe (AWA), Streifenbedingung

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, was sinnvolle AWAs bei partiellen DGLs sind.

Ziel: Die Lösung der AWA soll existieren und möglichst eindeutig festgelegt sein.

Zum Vergleich im \mathbb{R}^1 : $u'' = r(x, u, u')$

$u(\xi) = \eta, u'(\xi) = \eta'$

Im \mathbb{R}^1 ist also (ξ, η, η') vorgegeben.

Die Lösung ist dann („in der Regel“) eindeutig festgelegt; wenn z. B. u in einer Umgebung von (ξ, η, η') stetig differenzierbar ist, folgt die Eindeutigkeit nach dem Satz von Picard–Lindelöf.

Entsprechend im \mathbb{R}^2 : Gegeben sei eine C_1 -glatte, doppelpunktfreie Kurve

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \stackrel{\wedge}{=} t_0 < t < t_1\} \subset \Omega$$

in Parameterdarstellung.

Kann man hierauf (in Verallgemeinerung des 1D-Falles) u, u_x, u_y vorgeben? Um diese Frage zu untersuchen, betrachten wir das Verhalten einer beliebigen Lösung $u(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung auf der Kurve $\Gamma: U = U(t) := u(x(t), y(t))$ mit dem Kurvenparameter t ; etwas ungenauer, aber einfacher: $U = u(t)$. \dot{U} sei die Ableitung von U nach dem Kurvenparameter t .

Offenbar gilt (da $u \in C_2$ und Γ C_1 -glatt):

$$\dot{U}(t) = u_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + u_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

(Kettenregel), oder kurz

$$\boxed{\dot{u} = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} \text{ auf } \Gamma} \quad (\text{„Streifenbedingung“}) \quad (11.2)$$

Dies ist eine „Verträglichkeitsbedingung für die 1. Ableitung“ und die Funktionswerte auf Γ .

Bedeutung im Zusammenhang mit AWA: Falls u auf Γ vorgegeben ist, dann ist auch die Richtungsableitung in Tangentialrichtung von u auf Γ festgelegt, das heißt \dot{u} ist festgelegt. Bei AWA ist also nur vorschreibbar

$$\boxed{\Gamma; u, u_x, u_y \text{ auf } \Gamma \text{ mit } \textit{Streifenbedingung}}$$

(sonst ist das Problem überbestimmt) oder

Γ ; u , Richtungsableitung von u in *nicht* tangentialer Richtung auf Γ ;
zum Beispiel: $u_n =$ Normalenableitung (zur Kurve Γ).

Bemerkung 11.3 Die Ableitung in tangentialer Richtung ist bereits durch die Vorgabe von u auf Γ bestimmt. \gg

Bemerkung 11.4 Für $u \in C_1$ ist ∇u (und damit sämtliche Richtungsableitungen) festgelegt durch Vorgabe der Richtungsableitungen in zwei unabhängigen Richtungen. Ausgezeichnete Richtungen sind in diesem Zusammenhang:

(1) $e_1, e_2 \rightarrow$ partielle Ableitungen u_x, u_y

(2) tangentiale und normale Richtung. \gg

Die Beachtung der Streifenbedingung reicht aber im allgemeinen noch nicht aus, um sinnvolle AWA-Fragestellungen zu erhalten.

11.2.4 Bedingungen für die 2. Ableitungen u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}

Im \mathbb{R}^1 : Gegeben seien

$$u'' = r(x, u, u'), \quad (\xi, \eta, \eta') .$$

Die 2. Ableitung von u (an der Stelle ξ) ist dann durch die Differentialgleichung festgelegt! Falls $r \in C_\infty$, dann sind auch alle weiteren Ableitungen von u festgelegt durch Differentiation der Differentialgleichung! Falls die Lösung u analytisch ist, dann ist durch Festlegung aller Ableitungen an einer Stelle ξ die Funktion u selbst eindeutig festgelegt (Taylor-Entwicklung der Lösung).

Im \mathbb{R}^2 : Gegeben seien Differentialgleichung, glatte Kurve Γ , $u; u_x, u_y$ mit Streifenbedingung. Mit dem gleichen Gedankengang wie oben (siehe Abschnitt 11.2.3) folgt für eine Lösung $u \in C_2$: Durch u_x, u_y auf Γ sind auch \dot{u}_x, \dot{u}_y auf Γ festgelegt, und zwar gilt

$$\begin{array}{l} \dot{u}_x = u_{xx}\dot{x} + u_{xy}\dot{y} \\ \dot{u}_y = u_{yx}\dot{x} + u_{yy}\dot{y} \end{array} \quad \text{auf } \Gamma .$$

Das sind zwei Gleichungen für drei Unbekannte $u_{xx}, u_{xy}(= u_{yx}), u_{yy}$; eine dritte Gleichung ist die DGL

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = r(x, y, u, u_x, u_y) \quad \text{auf } \Gamma .$$

Damit haben wir für die 2. Ableitungen von u auf Γ das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a & 2b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(x, y; u; u_x, u_y) \\ \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{bmatrix}. \quad (11.3)$$

Wenn wir eine Lösung der AWA haben, muß dieses GLS immer lösbar sein! Wir stellen uns daher die Frage, wann die 2. Ableitungen u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} auf Γ durch dieses System eindeutig festgelegt sind: Betrachten wir die Determinante dieses Systems

$$\Delta := \det \begin{bmatrix} a & 2b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} = \Delta(t) \text{ auf } \Gamma,$$

so sind zwei Fälle möglich:

- (1) $\Delta(t) \neq 0$ auf Γ , dann sind die 2. Ableitungen durch das System (11.3) eindeutig festgelegt.
- (2) $\Delta(t) = 0$ an einer Stelle $t = t^*$. Dann sind die 2. Ableitungen durch das System an der Stelle t^* nicht eindeutig festgelegt.

Falls eine Lösung u gegeben ist, dann müssen die 2. Ableitungen von u aber auch im Falle $\Delta(t) = 0$ dem System (11.3) genügen. Hier ergeben sich weitere Verträglichkeitsbedingungen (s. u.)

Definition 11.1 Die Kurve Γ hat an der Stelle $(x^*, y^*) = (x(t^*), y(t^*))$ „charakteristische Richtung“, falls $\Delta(t^*) = 0$. Die Kurve Γ heißt „charakteristische Kurve“ (oder „Charakteristik“, falls $\Delta(t) \equiv 0$ auf Γ).

11.2.5 Bestimmung der charakteristischen Kurven

Wir betrachten den Fall $\Delta(t) = 0$.

$$\Delta(t) = a \dot{y}^2 - 2b \dot{x} \dot{y} + c \dot{x}^2 \equiv 0$$

ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung (implizit) (mit konstanten Koeffizienten) für die zwei Funktionen $x(t), y(t)$: Damit durch $(x(t), y(t))$ eine (nicht „entartete“) Kurve definiert wird, wird außerdem verlangt

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \text{ für alle } t.$$

Parametrisiert man die Kurve nach der Bogenlänge, hat man $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$.

Annahme:

$$\dot{x}(t) \neq 0$$

(Das heißt senkrechte Tangenten sind ausgeschlossen. Der Fall $\dot{x} = 0$ muß dann gesondert betrachtet werden.) O. E. kann dann $\dot{x}(t) \equiv 1$ angenommen werden, das heißt die Kurve ist mittels der x -Achse parametrisiert ($x \equiv t$). Wir schreiben dann

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

In diesem Fall vereinfacht sich die obige Bestimmungsgleichung zu

$$\Delta(t) = a (y')^2 - 2b y' + c \equiv 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in y' , im allgemeinen sind also zwei Lösungsscharen zu erwarten.

Beachte: Es sind nur *reelle* Lösungen gesucht!

Annahme: $a \neq 0$. Dann ist

$$\boxed{y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a c}}{a}} \quad (11.4)$$

Da wir a, b, c als konstant angenommen hatten, können wir diese Gleichung direkt integrieren.

Definition 11.2 (Typeneinteilung) Die Differentialgleichung heißt

- (1) *hyperbolisch*, falls $b^2 - a c > 0$; dann hat (11.4) als Lösung die beiden Geradenscharen

$$y = \frac{b + \sqrt{b^2 - a c}}{a} x + \text{const}$$

$$y = \frac{b - \sqrt{b^2 - a c}}{a} x + \text{const}$$

mit $\text{const} \in \mathbb{R}$ als Scharparameter.

- (2) *parabolisch*, falls $b^2 - a c = 0$; dann hat (11.4) nur die eine Geradenschar

$$y = \frac{b}{a} x + \text{const}$$

mit $\text{const} \in \mathbb{R}$ (Scharparameter) als Lösung.

- (3) *elliptisch*, falls $b^2 - a c < 0$; dann hat (11.4) keine reelle Lösung!

Diese Unterscheidung verschiedener Typen partieller Differentialgleichungen ist von fundamentaler Bedeutung. Die unterschiedlichen Typen weisen i.d.R. auch ein ganz unterschiedliches Verhalten der Lösungen auf.

Für die Typeneinteilung und zur Einführung des Begriffs der Charakteristiken gibt es verschiedene Möglichkeiten: abstrakt, anschaulich an Beispielen, oder - wie hier - elementar über die Fragestellung sinnvoller AWAs.

11.2.6 Beispiele (Prototypen)

Wellengleichung

$$\begin{aligned}u_{xx} - u_{yy} &= 0 && \text{(hyperbolisch)} \\ \Delta &= \dot{y}^2 - \dot{x}^2 \\ (y')^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

Lösungen: $y' = \pm 1$

$$\begin{aligned}y' = +1 &\Rightarrow y = x + \text{const.} \\ y' = -1 &\Rightarrow y = -x + \text{const.}\end{aligned}$$

Dies sind die Charakteristiken, die zur Wellengleichung gehören.

Bemerkung 11.5 $\dot{x} = 0$ kann nicht auftreten, da dann $\dot{y}^2 - \dot{x}^2 = 0$ gelten müsste, $\dot{y}^2 + \dot{x}^2 \neq 0$ aber vorausgesetzt wurde. \gg

Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}u_{xx} - u_y &= 0 && \text{(parabolisch)} \\ \Delta &= \dot{y}^2\end{aligned}$$

Lösung: $y' = 0 \Rightarrow y = \text{const.}$ Die Charakteristiken der Wärmeleitungsgleichung sind also die Parallelen zur x -Achse.

Auch hier ist $\dot{x} = 0$ unmöglich, da $\dot{y}^2 = 0$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$.

Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{(elliptisch)} \\ \Delta &= \dot{y}^2 + \dot{x}^2 = 0\end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $\dot{y}^2 + \dot{x}^2 \neq 0$ besitzt diese Gleichung keine reellen Lösungen. Also existieren *keine* Charakteristiken.

Bemerkung 11.6 (Ausgeschlossene Fälle)

$$(1) \quad \boxed{\dot{x} = 0} \Rightarrow \dot{y} \neq 0$$

Parametrisierung dann bzgl. y -Achse (x und y vertauschen). Analoge Überlegung wie oben. Bei dem hier betrachteten Fall konstanter Koeffizienten folgt darüber hinaus:

$$\Delta(t) \equiv 0, \dot{x} = 0, \dot{y} \neq 0, \Rightarrow a = 0$$

$$(2) \quad \boxed{a = 0} :$$

(i) Der elliptische Fall (3) in Definition 11.2 kann nicht auftreten, da $b^2 \geq 0$.

(ii) Der parabolische Fall (2) in Definition 11.2 liegt vor, falls $b = 0$, $c \neq 0$, das heißt dann ist $cu_{yy} = 0$.

Die einzigen Lösungen (von $\Delta(t) = c\dot{x}^2 = 0$) sind dann die Parallelen zur y -Achse.

(iii) Der hyperbolische Fall (1) in Definition 11.2 liegt vor, falls $b \neq 0$, das heißt $2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$. (Also ist $\Delta = \dot{x}(-2b\dot{y} + c\dot{x}) \equiv 0$)

In diesem Fall existieren zwei Lösungsscharen:

$$\begin{aligned} \dot{x} \equiv 0 & \quad \text{Parallelen zur } y\text{-Achse} \\ \dot{x} \neq 0 : \quad y' = \frac{c}{2b} & \Rightarrow y = \frac{c}{2b} x + \text{const.} \end{aligned}$$

>>

Beispiel 11.5 Wir betrachten die hyperbolische partielle DGL

$$\boxed{u_{xy} = 0} \quad (b = 1, a = c = 0).$$

Ihre Charakteristiken sind gegeben durch

$$\dot{x} \equiv 0 : \quad \text{Parallelen zur } y\text{-Achse}$$

$$\dot{y} \equiv 0 : \quad \text{Parallelen zur } x\text{-Achse}$$

Bei dieser DGL besteht ein enger Zusammenhang zur Wellengleichung: Die Transformation

$$x = \xi + \eta$$

$$y = \xi - \eta$$

führt $u_{xy} = 0$ über in die Wellengleichung $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$. Dabei werden die Charakteristiken um 45° gedreht (Übung):

Die Differentialgleichung $u_{xy} = 0$ kann unmittelbar gelöst werden. Es gilt

$$u_{xy} = 0 \Rightarrow u(x, y) = w_1(x) + w_2(y)$$

($w_1, w_2 \in C_2$ beliebig). Hieraus kann man direkt auf die Wellengleichung schließen:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \Rightarrow u(x, y) = w_1(x + y) + w_2(x - y) .$$

Hinweis: Diese Darstellung der Lösungsgesamtheit bietet für die konkrete Lösung von AWA im allgemeinen (bei beliebigen Anfangskurven Γ) jedoch wenig Hilfe (vgl. aber den Satz von d’Alembert in Abschnitt 11.4.1). \triangle

11.2.7 Bedeutung der obigen Überlegungen für AWA

Falls die (Anfangs-)Kurve Γ in (x^*, y^*) charakteristische Richtung besitzt, dann muß außer der Streifenbedingung dort auch eine Verträglichkeitsbedingung für die zweiten Ableitungen erfüllt sein, denn die Lösbarkeit des Gleichungssystems (11.3) muß trotz $\Delta(t^*) = 0$ gesichert sein! Für die rechte Seite des Gleichungssystems muß also

$$\begin{pmatrix} r \\ \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{pmatrix} \in \text{span} \left[\begin{pmatrix} a \\ \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2b \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right]$$

gelten. Offenbar sind

$$\begin{pmatrix} a \\ \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig, da $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, also muß gelten

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} r \\ \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{pmatrix} \in \text{span} \left[\begin{pmatrix} a \\ \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right] \quad \text{für } t = t^* .} \quad (11.5)$$

Ist Γ selbst eine Charakteristik, so muß (11.5) für alle $t \in (t_0, t_1)$ gelten.

11.2.8 Numerische Bedeutung

Das Erfülltsein der Bedingung (11.5) längs beliebiger Charakteristiken ist die Grundlage des sogenannten *Charakteristikenverfahrens* zur Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen.

11.2.9 Nichtkonstante Koeffizienten (Verallgemeinerung)

Obige Überlegungen lassen sich leicht auf den Fall

$$a = a(x, y), \quad b = b(x, y), \quad c = c(x, y)$$

übertragen. Wie in Abschnitt 11.2.5 folgt:

$$\Delta(t) = a(x(t), y(t)) \dot{y}^2 - 2b(x(t), y(t)) \dot{x} \dot{y} + c(x(t), y(t)) \dot{x}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{b(x, y) \pm \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)}} \quad (\text{im Falle } \dot{x} \neq 0, a \neq 0)$$

mit den gleichen Fallunterscheidungen wie oben.

Der Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) hängt dann aber von x, y ab! Die Charakteristiken sind im Fall variabler Koeffizienten i. a. keine Geraden, sondern Kurvenscharen:

- bei (lokal) hyperbolischen Differentialgleichungen: 2 Kurvenscharen,
- bei (lokal) parabolischen Differentialgleichungen: 1 Kurvenschar,
- bei (lokal) elliptischen Differentialgleichungen: 0 Kurvenscharen.

Im *quasilinearen* Fall hängen die Begriffe elliptisch, parabolisch und hyperbolisch sogar von der Lösung u ab (vgl. Beispiel 11.6)!

Bemerkung 11.7 Häufig wird die DGL $u_{xx} + u_{yy} = r(x, y)$ auch als Potentialgleichung bezeichnet. Sie beschreibt z.B. das Gravitationspotential oder das Strömungspotential einer inkompressiblen Strömung, aber auch die Auslenkung einer elastischen Membran unter einer Belastung $r(x, y)$ u.v.a.m.

I.a. beschreiben elliptische DGLs stationäre (d.h. nicht zeitabhängige) Zustände (raumartige DGL).

Im hyperbolischen Fall $u_{xx} - u_{tt} = r$ spricht man auch von der 1D Wellengleichung, da diese DGL die Wellenausbreitung in einer Raumdimension beschreibt (zeitartige DGL); x ist in diesem Zusammenhang eine 1D Raumvariable, t die Zeitvariable.

Der parabolische Fall $u_{xx} = u_t$ beschreibt die Wärmeausbreitung in einer Raumdimension (zeitartige DGL); hier ist wieder x eine 1D Raumvariable, t die Zeitvariable.

Diese rein heuristische Unterscheidung zwischen raum- und zeitartigen Differentialgleichungen ist aber weder erschöpfend noch allgemein, wie das folgende Beispiel zeigt. »

Beispiel 11.6 Die partielle DGL für das Strömungspotential $u = u(x, y)$ einer stationären, rotations- und reibungsfreien (usw.) Strömung eines idealen Gases lautet (in 2 Dimensionen):

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{C^2} (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}) = 0$$

mit

$$C = C(u_x, u_y)$$

↑
lokale Schallgeschwindigkeit

(C ferner von der speziellen physikalischen Situation abhängig, zum Beispiel von den spezifischen Wärmen des Gases.)

Die Gleichung ist

$$\begin{aligned} \text{elliptisch} & \iff C > q \quad (\text{Unterschallbereich}) \\ \text{hyperbolisch} & \iff C < q \quad (\text{Überschallbereich}) \end{aligned}$$

wobei $q = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$ der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit ist. Das unterschiedliche Verhalten der Lösungen im elliptischen bzw. hyperbolischen Bereich ist akustisch wahrnehmbar: *Überschallknall*.

Obige Gleichung ist ein besonders simpler Spezialfall der allgemeinen Navier–Stokes-Gleichungen der Strömungsmechanik.

Im inkompressiblen Fall (Flüssigkeiten) entfällt der nichtlineare Anteil. Die Gleichung lautet dann (unter geeigneten Annahmen) nur $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace-Gleichung). \triangle

11.3 Sachgemäß gestellte Aufgaben, Satz von Cauchy-Kowalewski, Beispiele für AWA, ARWA, RWA

11.3.1 Sprachgebrauch (keine präzise Definition)

Betrachte Differentialgleichung wie in (11.1):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = r(\dots) \text{ auf } \Omega$$

mit einer zugehörigen Anfangsbedingung auf der Anfangskurve Γ :

$$\Gamma; u; u_x, u_y \quad \text{mit Streifenbedingung.}$$