

An Algorithm for Determining the Size of Symmetry Groups

Fritz Schwarz, Sankt Augustin

Received December 16, 1991; revised May 29, 1992

Abstract — Zusammenfassung

An Algorithm for Determining the Size of Symmetry Groups. To determine the symmetry group of point- or Lie-symmetries of a differential equation is of great theoretical and practical importance, in particular for determining closed form solutions. There does not seem to exist an algorithm that finds this group in general. However, it is always possible to determine the *size* of the symmetry group. In this article an algorithm is described that determines for any system of algebraic partial differential equations the number of parameters if the symmetry group is finite, and the number of unspecified functions and its arguments if it is infinite. To this end the so called *determining system* is transformed into an *involution system* by means of a critical-pair/completion algorithm similar like it is applied for computing Gröbner bases in polynomial ideal theory. The foundation for obtaining this form is the theory of Riquier and Janet for partial differential equations. The algorithm *InvolutionSystem* has been implemented in several computer algebra systems as part of the package *SPDE*. Various results that have been obtained by applying it are presented as well. If symmetry analysis is considered as part of the more general process of obtaining the best possible information on the solutions of a differential equation, the algorithm described in this article removes the heuristics which is usually involved in making the transition from analytical to numerical methods.

AMS (MOS) Subject Classifications: 68Q40, 68Q42, 35A30

Key words: Symmetries of differential equations, differential Gröbner base, involutive system.

Ein Algorithmus zur Bestimmung der Größe von Symmetriegruppen. Die Bestimmung der Symmetriegruppe von Punkt- oder Lie Symmetrien einer Differentialgleichung ist von großer theoretischer und praktischer Bedeutung, besonders um Lösungen in geschlossener Form zu finden. Es scheint keinen Algorithmus zu geben, der diese Gruppe im allgemeinen Fall findet. Es ist jedoch immer möglich, die *Größe* der Symmetriegruppe zu finden. In diesem Artikel wird ein Algorithmus beschrieben, der für ein beliebiges System algebraischer Differentialgleichungen die Anzahl der Parameter für eine endliche Symmetriegruppe und die Anzahl der unbestimmten Funktionen und ihre Argumente für eine unendliche Gruppe bestimmt. Dazu wird das bestimmende System in involutive Form transformiert mit Hilfe eines sogenannten Vervollständigungsverfahrens ähnlich wie bei der Berechnung von Gröbnerbasen in der Polynom-Idealtheorie. Die Grundlage dieses Algorithmus ist die Theorie partieller Differentialgleichungen von Riquier und Janet. Der Algorithmus *InvolutionSystem* ist in mehreren Computer-Algebra Systemen als Teil des Pakets *SPDE* implementiert. Verschiedene Ergebnisse, die damit erhalten wurden, werden ebenfalls beschrieben. Die Symmetrieanalyse ist Teil eines allgemeineren Prozesses, nämlich die bestmögliche Information über die Lösungen von Differentialgleichungen zu erhalten. In diesem Prozeß behebt der Algorithmus, der in dieser Arbeit beschrieben wird, zu einem großen Teil die Heuristik, die üblicherweise beim Übergang zu numerischen und graphischen Methoden involviert ist.

1. Introduction

The interest in determining symmetry groups for differential equations arose during the middle of the last century. At that time the remarkable discoveries of Galois