Differentialgleichungen lösen mit Computeralgebra

Von Fritz Schwarz

Seit Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) und Isaac Newton (1643 bis 1727) die Begriffe Ableitung und Integral einer Funktion einführten, hat sich herausgestellt, daß nahezu alle bedeutenden Naturgesetze mit diesen Begriffen zu formulieren sind. Beispielsweise entspricht das Integrieren einer Funktion der Aufgabe, den Weg eines Punktes zu bestimmen, wenn seine Geschwindigkeit zu jeder Zeit sowie sein Ort zu einem gewissen Anfangszeitpunkt bekannt sind. Das kann schon ziemlich kompliziert werden (vergleiche den vorstehenden Beitrag); aber es ist erst die Vorstufe zur Lösung einer Klasse realitätsnäherer Probleme. Typischerweise ist in einem physikalischen Gesetz die Geschwindigkeit, das heißt die Ableitung des Ortes nach der Zeit, nicht Funktion der Zeit, sondern des Ortes; der ist aber gerade gesucht. Es ist also eine Gleichung zu lösen, die eine unbekannte Funktion $y(t)$ (den Ort) mit ihrer Ableitung $y'(t)$ (der Geschwindigkeit) in Beziehung setzt: eine Differentialgleichung. Das Lösen solcher Gleichungen ist eines der wichtigsten Probleme der angewandten Mathematik.

Physikalische Probleme sind in der Regel noch eine Stufe komplizierter als das oben angegebene Beispiel: Nicht die Geschwindigkeit steht unmittelbar in einer funktionalen Beziehung zum Ort, sondern die Beschleunigung; das ist die Ableitung der Geschwindigkeit oder auch die zweite Ableitung des Ortes, geschrieben $y''(t)$.

Nach einer längeren Herleitung aus physikalischen Gesetzen und einigen Umformungen hat man also eine Gleichung vor sich wie

$$x^3y'' + x(2x-1)y' + y = 0 \qquad (1)$$

oder

$$y''y + y''x - y'^2 - y' = 0\,. \qquad (2)$$

Weil die gesuchte Funktion y von einer einzigen Variablen (nämlich x) abhängt, spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung (im Gegenatz zu partiellen Differentialgleichungen, die mehrere unabhängige Variable enthalten). In Anwendungen ist mit der unabhängigen Variablen x häufig die Zeit gemeint.

Die beste Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist eine geschlossene Formel. Gleichung (1) etwa hat die Lösung $y = C_1y_1 + C_2y_2$, wobei

$$y_1 = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}},\ y_2 = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\int e^{\frac{1}{x}}\,dx\,,$$

und Gleichung (2) die Lösung

$$144C_1(y+x)^2 + 64C_1^2(y-x+C_2)^2 + 81 = 0\,,$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Auch wenn die erste Lösung ein nicht elementar darstellbares Integral enthält und die zweite den Wert von y nicht explizit angibt, sondern nur eine algebraische Gleichung, deren Lösung y ist, erlauben derartige Darstellungen Einsichten in die Struktur der Lösung, die man mit numerischen Verfahren niemals erhalten könnte.

Im allgemeinen ist es äußerst schwierig, für eine gewöhnliche Differentialgleichung eine geschlossene Lösung zu finden. In den verbreiteten Lehrbüchern findet man systematische Verfahren nur für die einfachsten Fälle (vergleiche den Beitrag von Stefan Braun und Harald Häuser). Im Laufe der Zeit hat man allerdings für zahlreiche, vor allem für praktisch relevante Einzelfälle spezielle Lösungen gefunden. Oft hat dabei die Intuition geholfen, die aus dem Verständnis für das zugrundeliegende Problem herrührte. Der Tübinger Mathematiker Erich Kamke (1890 bis 1961) hatte vor etwa 40 Jahren eine umfangreiche Tabelle solcher Spezialfälle zusammengestellt. Jeder Anwender hat diesen „Kamke" im Regal stehen.

Aber eine solche Sammlung als im wesentlichen einziges Hilfsmittel zum Finden einer Lösung ist sehr unbefriedigend: Die Gleichung, die einen gerade besonders interessiert, steht wahrscheinlich nicht darin (oder nicht in wiedererkennbarer Form); und ungewiß bleibt schließlich, ob es nicht vielleicht doch eine geschlossene Formel für die Lösung gibt. Viel besser wären algorithmische Verfahren, die entweder eine Formel für die Lösung liefern oder die Auskunft, daß eine solche nicht existiert.

Das ist besonders deswegen erstaunlich, weil teilweise schon im vorigen Jahrhundert etliche systematische Lösungsmethoden – in enger Anlehnung an entsprechende Verfahren für algebraische Gleichungen – entwickelt und veröffentlicht worden sind. Sie wurden nie für die Praxis angewendet und gerieten zum Teil sogar in Vergessenheit, denn sie erforderten einen ungeheuren Aufwand an analytischen Rechnungen, der mit Bleistift und Papier praktisch nicht zu bewältigen ist. Dies hat sich durch die Computeralgebra grundlegend geändert.

Wie bei den algebraischen Gleichungen sind zwei Begriffe von besonderer Bedeutung: Faktorisierung in möglichst einfache Komponenten und Symmetrien.

Faktorisierung

Schon das Lösen einer quadratischen Gleichung läßt sich als Faktorisierung auffassen, wenngleich dieser Aspekt in der Schule selten im Vordergrund steht. Die Gleichung $x^2-2x-4=0$ hat die Lösungen $x = 1\pm\sqrt{5}$. Anders ausgedrückt: Die linke Seite der Gleichung ist gleich dem Produkt $(x-(1+\sqrt{5}))(x-(1-\sqrt{5}))$. (Wer noch die dritte binomische Formel kann, hat das im Handumdrehen nachgeprüft.) Dieses Produkt soll gleich null sein; das ist genau dann der Fall, wenn einer der Faktoren gleich null ist. Also treten an die Stelle der ursprünglichen Gleichung „Produkt gleich null" zwei einfachere: „Faktor gleich null".

Was bei der quadratischen Gleichung nur Umformulierung bekannter Tatsachen ist, liefert bei schwierigeren Problemen mitunter den entscheidenden Schritt zur Lösung. Für Gleichungen fünften Grades wie etwa

$$2x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 16x + 10 = 0$$

gibt es kein allgemein anwendbares Lösungsverfahren; die linke Seite dieser speziellen Gleichung ist jedoch in die Faktoren

$$(x^3 + 2x + 2)(2x^2 + 3x + 5)$$

zerlegbar, und die beiden Gleichungen $x^3 + 2x + 2 = 0$ und $2x^2 + 3x + 5 = 0$ sind mit Standardverfahren lösbar.

Eine ähnliche Strategie ist auch für lineare homogene Differentialgleichungen