01;03

Классические и неклассические симметрии нелинейного уравнения с дисперсией и диссипацией

© В.В. Гурский,[1] А.М. Самсонов,[1] Ф. Шварц[2]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербруг, Россия
[2] Институт алгоритмов и научных вычислений (SCAI) общества Фраунгофера,
Санкт Аугустин, D-53754 Германия
e-mail: samsonov@math.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 17 апреля 2003 г.)

Найдены неклассические симметрии нелинейного уравнения четвертого порядка в частных производных с дисперсией и диссипацией, и на их основе новые точные решения, инвариантные относительно вычисленных симметрий. Уравнение описывает распространение длинных нелинейных продольных волн деформации в упругом стержне, помещенном во внешнюю диссипативную среду, волн на поверхности вязкой жидкости и т. п. Решения в виде бегущих волн исследованы на основе классических симметрий уравнения, полученного редукцией исходного уравнения, показано, что такие решения могут быть построены в классе эллиптических функций.

Введение

Целью исследования является построение новых решений нелинейного квазигиперболического уравнения с диссипацией, описывающего распространение волн деформации в нелинейно упругом стержне, помещенном в диссипативную или активную среду [1], на основе полученных симметрий Ли. Такое уравнение квазигиперболического типа содержит производные четвертого порядка, отвечающие за дисперсию, и производную третьего порядка, описывающую диссипацию энергии в окружающую среду через контакт на боковой поверхности волновода. В связи со сложностью и универсальностью уравнения, применимого во многих задачах о длинных волнах в волноводе, любые точные решения весьма важны для приложений и численных экспериментов. Точные решения дифференциальных уравнений, инвариантные относительно групп точечных преобразований часто являются асимптотически устойчивыми аттракторами (в некоторой функциональной норме) решений начально-краевых задач для этих уравнений.

Классическая теория точечных симметрий Ли дифференциальных уравнений описывает группы инфинитезимальных преобразований в пространстве независимых и зависимых переменных, которые оставляют неизменным многообразие, связанное с уравнением [2–4]. Контактные преобразования (симметрии Ли–Беклунда) являются обобщением таких симметрий и включают в себя преобразования производных [2,3]. Однако класс уравнений в частных производных, обладающих нетривиальными точечными или контактными симметриями достаточно узок, что ограничивает применимость метода классических симметрий.

Если уравнение содержит свободные параметры или произвольные функции, то в ряде случаев можно сформулировать ограничения на эти параметры и функции, при которых уравнение будет обладать нетривиальной симметрией, и построить соответствующее инвариантное решение. Обычно такие вычисления достаточно трудоемки, поэтому их удобно проводить, используя символьные вычислительные средства. В данной работе в качестве такого инструмента использован пакет ALLTYPES, разработанный одним из авторов [15].

Помимо метода симметрий часто применяются различные методы прямого поиска точных решений нелинейных уравнений, некоторые из них предожены и рассмотрены в [1,6,7,8,9]. Разработаны обобщения методов классических точечных и контактных симметрий Ли [10–12]; было показано, что эти новые групповые методы (неклассические и условные симметрии) могут приводить к новым инвариантным решениям. В частности, установлено, что любая редукция уравнения в частных производных (УЧП) к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) или системе ОДУ эквивалентна существованию неклассической симметрии, допускаемой данным УЧП [6,11,13]. Однако математически строгие связи между методом симметрий и методами прямого интегрирования нелинейных уравнений пока не найдены.

В работе показано, что рассматриваемое нелинейное уравнение обладает классическими и неклассическими симметриями. Неклассические симметрии дают новое точное решение, которое может описывать эффекты релаксации динамической нагрузки к постоянному значению напряжения и периодические осцилляции упругих напряжений, тогда как классические инвариантные решения являются решениями в виде бегущих волн. Рассматриваются несколько методов для построения этих решений, в частности, исследуются классические симметрии соответствующего ОДУ для бегущих волн. Инвариантные решения, связанные с этими симметриями, найдены через эллиптические функции Якоби с фиксированным модулем.

Классические и неклассические симметрии

Рассмотрим следующее нелинейное квазигиперболическое УЧП с двумя дисперсиями и диссипацией:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \left(u^2 + a u_{xx} + b u_{tt}\right)_{xx} - \mu u_{xxt} = 0. \qquad (1)$$

Здесь t — время; x — пространственная координата вдоль продольной оси стержня, имеющего конечное поперечное сечение; a, b, c и μ — константы, зависящие от свойств волновода и внешней среды; детали вывода можно найти в [1]. В отсутствие диссипации $\mu = 0$ это уравнение описывает распространение нелинейных продольных волн „деформации“ $u(x,t)$ в нелинейно-упругом стержне и называется уравнением с двумя дисперсиями (УДД); строго говоря, $u(x,t)$ есть производная по x от продольного смещения, т.е. компонента градиента смещения. Первое слагаемое в правой части (1) представляет упругую нелинейность волновода, а второе и третье отвечают за дисперсию волн вследствие малого, но конечного размера поперечного сечения стержня. Предполагается, что стержень, окружен внешней упругой средой, причем сила реакции в зоне контакта содержит диссипативную (или активную) компоненту [1,14]. После ряда преобразований наличие контакта такого типа приводит к появлению в уравнении (1) диссипативного (активного) слагаемого с коэффициентом μ [1]. Аналогичное (1) уравнение возникает и в теории поверхностных волн на мелкой воде, в этом случае μ будет пропорциоанльно коэффициенту вязкости жидкости и в некоторых дургих приложениях.

Найдем операторы классических и неклассических симметрий, допускаемых уравнением (1). Для этого рассмотрим векторное поле инфинитезимальных преобразований в фазовом пространстве (x,t,u)

$$X = \xi(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (2)$$

Функции $u = u(x,t)$, инвариантные относительно X, суть решения уравнения, возникающего как „условие инвариантной поверхности“,

$$\varphi(x,t,u) - \xi(x,t,u)\,\frac{\partial u}{\partial x} - \eta(x,t,u)\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \qquad (3)$$

Данное условие представляет собой УЧП первого порядка для $u(x,t)$. Рассмотрим пространство J^4 с декартовыми координатами $(x,t,u,u^{(4)})$, где через $u^{(4)}$ обозначены все производные u по x и t до четвертого порядка включительно. В таком пространстве уравнение (1) можно представить как многообразие $E \subset J^4$, определяемое следующими равенствами:

$$E\ :\ F(x,t,u,u^{(4)}) \equiv u_{tt} - c^2 u_{xx} - 2u_x^2 - 2uu_{xx} - a u_{xxxx} - b u_{xxtt} - \mu u_{xxt} = 0.$$

В этой формуле функция F определяется как левая часть уравнения (1), а все производные должны пониматься как независимые координаты в J^4. Обозначим через $M \subset J^4$ многообразие уравнения (3), т.е. многообразие X-инвариантных решений.

Действие векторного поля (2) в фазовом пространстве порождает действие продолженного векторного поля $X^{(4)}$ в J^4, где

$$X^{(4)} = X + \xi^x\,\frac{\partial}{\partial u_x} + \xi^{tt}\,\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \xi^{xx}\,\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \xi^{xxt}\,\frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \xi^{ttxx}\,\frac{\partial}{\partial u_{ttxx}} + \xi^{xxxx}\,\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}},$$

$$\xi^\alpha = D_\alpha\varphi - u_x D_\alpha\xi - u_t D_\alpha\eta, \quad \alpha \in \{x,t\},$$

$$\xi^{\alpha\beta_1,\ldots,\beta_N} = D_\alpha\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_N} - u_{x\beta_1,\ldots,\beta_N}D_\alpha\xi - u_{t\beta_1,\ldots,\beta_N}D_\alpha\eta,$$

$$\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_N \in \{x,t\}, \quad s = 1–4,$$

$$D_\alpha = \partial_\alpha + u_\alpha\,\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\beta_1} u_{\alpha\beta_1}\,\frac{\partial}{\partial u_{\beta_1}} + \sum_{\beta_1,\beta_2} u_{\alpha\beta_1\beta_2}\,\frac{\partial}{\partial u_{\beta_1\beta_2}} + \ldots,$$

$$\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots \in \{x,t\}. \qquad (4)$$

Классические симметрии Ли определяются как решения следующей системы уравнений (определяющие уравнения) для координат оператора X [3,4]:

$$\left(X^{(4)}F\right)\big|_E = 0.$$

Неклассические симметрии включают в себя векторные поля X, удовлетворяющие следующим модифицированным определяющим уравнениям [12]:

$$\left(X^{(4)}F\right)\big|_{E\cap M} = 0. \qquad (5)$$

Неклассические симметрии оставляют инвариантным не все многообразие уравнения E, а только его пересечение с многообразием M. Данное пересечение содержит X-инвариантные решения уравнения.

Определяющие уравнения (5) имеют вид нелинейных УЧП для функций ξ, η и φ, решить которые в общем виде не удается. Для нахождения частных решений понадобились упрощающие предположения о функциональном виде решения уравнений (5), в результате вычислений удалось найти следующие симметрии уравнения (1):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + \big(f(t)x + h(t)\big)\,\frac{\partial}{\partial u}, \qquad (6)$$

где $f(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$f'' = 6f^2, \quad h'' = 6fh. \qquad (7)$$

Первое уравнение в (7) есть дифференциальное уравнение, определяющее эллиптическую функцию Вейерштрасса $\mathscr{P}$. Операторы X_1 и X_2 представляют классические симметрии уравнения, тогда как Y есть существенно неклассическая симметрия.

Неклассические инвариантные решения

По определению неклассических симметрий решение $u_Y(x,t)$, инвариантное относительно Y, также удовлетворяет условию инвариантной поверхности (3) для Y. Решение последнего имеет вид

$$u_Y(x,t) = \frac{f(t)}{2}x^2 + h(t)x + k(t), \tag{8}$$

где $k(t)$ удовлетворяет следующему ОДУ:

$$k'' - 2fk = 2h^2 + f(c^2 + 6bf) + hf'. \tag{9}$$

Решение уравнения для $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = \mathfrak{P}(t+\alpha; 0, g_3), \tag{10}$$

где α и g_3 суть произвольные постоянные.

Для подробного изучения решения u_Y упростим $f(t)$, положив третий инвариант функции $\mathfrak{P}$ равным нулю $g_3 = 0$. В этом частном случае $f(t)$ вырождается в рациональную функцию

$$f(t) = \frac{1}{(t+\alpha)^2},$$

и тогда функции $h(t)$, $k(t)$ можно вычислить в явном виде

$$h(t) = \frac{1}{(t+\alpha)^2}$$

$$\times\left(\beta + \gamma\left[\frac{t^5}{5} + \alpha t^4 + 2\alpha^2 t^3 + 2\alpha^3 t^2 + \alpha^4 t\right]\right),$$

$$k(t) = \frac{P_{10}(t,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda)}{(t+\alpha)^2} + \frac{2\mu\log(t+\alpha)}{3(t+\alpha)},$$

где β, γ, δ и λ — произвольные постоянные, P_{10} — полином десятой степени по t, коэффициенты которого определяются постоянными α, β, γ, δ и λ; запись полинома P_{10} в явном виде довольно громоздка и здесь не приводится.

Полагая $\gamma = \lambda = 0$, получим одно из ограниченных во времени решение u_Y вида

$$u_Y(x,t) = \frac{1}{(t+\alpha)^2}\left(\frac{x^2}{2} + \beta x\right) + k(t),$$

$$k(t) = \frac{3b+\beta^2}{2(t+\alpha)^2} + \frac{\delta}{t+\alpha} - \frac{c^2\left(t+\dfrac{\alpha}{3}\right)}{2(t+\alpha)}$$

$$+\mu\left(\frac{2}{9(t+\alpha)} + \frac{2}{3}\,\frac{2\log(t+\alpha)}{t+\alpha}\right). \tag{11}$$

Таким образом, u_Y полиномиально зависит от пространственной переменной x и сложным образом от времени (см. (10)). Решение (11), найденное при предположении $g_3 = 0$ в (10), описывает релаксацию деформации u нелинейно-упругого волновода к некоторому постоянному значению, определяемому параметрами в уравнении. Кроме того, подходящим образом выбрав сдвиг α в аргументе $\mathfrak{P}$-функции в (10) можно выразить функцию $f(t)$ через эллиптические функции Якоби, являющиеся ограниченными и периодическими функциями. В этом представлении решение u_Y будет описывать волны деформации, периодические во времени. Отметим, что, вообще говоря, физическая реализация таких режимов возможна только при специальных граничных условиях.

Другой интересной особенностью u_Y в представлении (11) является то, что каждое слагаемое в исходном нелинейном уравнении (1) вносит независимый вклад в решение вида (11). Видно, что первая дробь в функции $k(t)$ в (11) определяется только коэффициентом b, т. е. влиянием смешанной четвертой производной в уравнении (1); третья дробь зависит от линейного слагаемого с коэффициентом c; наконец, диссипативный член в уравнении, содержащий μ, определяет временнýю динамику, заданную двумя последними дробями в k. Такой эффект аддитивного вклада в решение нелинейной задачи от слагамых в уравнении, различных по физической природе, весьма необычен для точных решений нелинейных УЧП, хотя встречается при асимптотических решениях задачи.

Классические инвариантные решения

Решения, инвариантные относительно классических симметрий $X = X_1 - VX_2 = \partial_t - V\partial_x$ с постоянной V, имеют вид бегущей волны $u = u(z)$, зависящей от фазовой координаты $z = x - Vt$ и при соответствующих граничных условиях удовлетворяют нелинейному ОДУ второго порядка следующего вида:

$$(a + bV^2)u''(z) - \mu V u'(z) + u'(z)^2$$

$$+(c^2 - V^2)u(z) = A, \tag{12}$$

где A — произвольная константа.

Исследование Софуса Ли [15] было, пожалуй, первым посвященным описанию таких диссипативных ОДУ, что и позволяет назвать (12) уравнением Ли.

Для решения (12) в явном виде можно использовать весма общий метод, описанный в [1] и основанный на дифференциальной подстановке и сведению уравнения к уравнению Абеля, либо использовать какой-либо специальный анзац. Рассматривая третий, теоретико-групповой, подход для поиска возможных новых решений этого и подобных ему диссипативных уравнений, исследуем классические симметрии уравнения (12), чтобы найти соответствующие инвариантные решения.

Действуя так же, как описано выше, можно показать, что при ограничениях

$$A = 0, \quad (a + bV^2)(V^2 - c^2) = \frac{6}{25}\mu^2 V^2,$$

уравнение (12) допускает следующие симметрии:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \exp\left(-\frac{5}{6\mu V}(V^2 - c^2)z\right) \times \left[\frac{3\mu V}{5(V^2 - c^2)}\frac{\partial}{\partial z} + (u - V^2 + c^2)\frac{\partial}{\partial u}\right] \tag{13}$$

с коммутатором $(X_1, X_2) = -[5/(6\mu V)](V^2 - c^2)X_2$. Применяя данную двухпараметрическую симметрию так, как описано в [15], можно построить решения, инвариантные относительно (13), в следующем виде

$$u = B\left[1 - \xi^{-2}\exp\left(\frac{5B}{3\mu V}z\right)\right],$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - C_1\xi^6}} = \exp\left(\frac{5B}{6\mu V}z\right) + C_2, \tag{14}$$

где $B = (V^2 - c^2)$ и C_1, C_2 суть произвольные постоянные.

Интеграл в (14) приводится к эллиптическому интегралу первого рода при $C_1 > 0$. Обращая последний и подставляя результат ξ как функцию z в первую формулу в (14), после некоторых преобразований получим два решения $u_\pm = u_\pm(z)$

$$u_\pm(z) = B\left[1 - C_1^2\exp\left(\frac{5B}{3\mu V}z\right) \times \left(1\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,\frac{1 \pm CN}{SN^2}\right)\right], \tag{15}$$

где введены обозначения

$$SN \equiv \mathrm{sn}\left(2(3)^{1/4}C_1\exp\left(\frac{5B}{6\mu V}z\right) + C_2, k\right),$$

$$CN \equiv \mathrm{cn}\left(2(3)^{1/4}C_1\exp\left(\frac{5B}{6\mu V}z\right) + C_2, k\right),$$

и sn и cn суть эллиптические синус и косинус Якоби соответственно.

Их модуль определяется формулой

$$k = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \approx 0.26.$$

Выше для простоты использованы те же обозначения C_1 и C_2, что и в (14), но уже для новых произвольных постоянных.

Заключение

Исследованы симметрии нелинейного уравнения (1) с двумя дисперсиями и диссипацией, которое может служить естественным обобщением уравнения для длинных волн в волноводе с учетом нелинейных, дисперсионных и диссипативных слагаемых. В качестве метода исследования был применен метод неклассических симметрий, позволивший показать, что единственными классическими симметриями уравнения (1) являются операторы X_1 и X_2, соответствющие редукции уравнения (1) к ОДУ (12) для бегущих волн. Однако неклассический подход позволяет получить новую симметрию Y и использовать ее для построения инвариантного решения (8). Показано также, что решения уравнения (1) в виде бегущих волн могут быть получены как инвариантные решения соответствующего ОДУ. Данные решения выражаются через эллиптические функции Якоби с фиксированным модулем.

Полученные результаты позволяют надеяться, что другие возможные обобщения существующих теоретико-групповых методов могут дать расширение класса известных точечных решений физически важных нелинейных уравнений. Для таких хорошо изученных уравнений, как уравнение Кортевега-де-Вриза и его модифицированный вариант, уравнения Бюргерса, нелинейное уравнение теплопроводности и др., были найдены довольно широкие множества неклассических симметрий, допускаемых этими уравнениями (см., например, [12,16]) и цитированную там литературу). Уравнение (1) представляет собою менее изученный и физически содержательный пример, для которого неклассический метод оказался плодотворным. Другой путь для исследований может состоять в поиске эффективных методов решения нелинейных определяющих уравнений (5) для неклассических симметрий.

Данное исследование было поддержано грантом ИНТАС (№ 99-00167) .

Список литературы

[1] *Samsonov A.M.* Strain Solitons in Solids and How to Construct Them. London; Boca Raton: Chapman& Hall / CRC, 2001.
[2] *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
[3] *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
[4] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
[5] *Schwarz F.* // Acta Appl. Math. 2000. Vol. 60. P. 39–113.
[6] *Cariello F., Tabor M.* // Physica D. 1991. Vol. 53. P. 59–70.
[7] *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30. P. 2201–2213.
[8] *Galaktionov V.A.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1995. Vol. 125 A. P. 225–246.
[9] *Samsonov A.M.* // Applic. Analysis. 1995. Vol. 57. P. 85–100.

[10] *Olver P.J., Rosenan P.* // J. Math. Mech. 1987. Vol. 47. P. 263–278.
[11] *Olver P.J.* Proc. Roy. Soc. (London). 1994. Vol. A444. P. 509–523.
[12] *Olver P.J., Vorob'ev E.M.* // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / Ed. N.H. Ibragimov. Boca Raton; CRC Press, 1996. Vol. 3. P. 291–328.
[13] *Ariigo D.J., Broadbridge P., Hill J.M.* // J. Math. Phys. 1993. Vol. 34. P. 4692–4703.
[14] *Kerr A.D.* // J. Appl. Mech. 1964. Vol. 31. P. 491.
[15] *Lie S.* // Arch. Mathem. 1883. Bd VIII. H. 4. S. 371–458.
[16] *Vorob'ev E.M.* // Acta Appl. Math. 1992. Vol. 26. P. 61–86.